2024 年 第 24 卷 第 20 期
2024, 24(20):08403-06

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

ISSN 1671—1815
CN 11—4688/T

DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2305543
引用格式:郑罡, 王保權, 王梦丽, 等. 四分点集中阻尼弦系统本征解的性质[J]. 科学技术与工程, 2024, 24(20): 8403-8408.
Zheng Gang, Wang Baoquan, Wang Mengli, et al. Properties of the intrinsic solution of a four-point centrally damped string system[J]. Science Technology and Engineering, 2024, 24(20): 8403-8408.

力学

四分点集中阻尼弦系统本征解的性质

郑罡, 王保權, 王梦丽, 张永顺, 曾广榕
(重庆交通大学省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 重庆 400074)

摘 要 带有集中阻尼的张紧弦系统在力学模型上属于混杂动力学系统,通常采用近似方法求解本征值以满足工程应用需求,为进一步明确该类系统的振动特性,有必要从解析角度探讨其本征问题。针对四分点集中阻尼弦系统,推导并化简其频率方程的代数形式,求得代数方程的解,经过换元逆过程,获得原频率方程的所有闭合解。发现闭合解共存在 3 组,其中两组互为共轭,根据代数基本定理讨论闭合解的结构。结果表明:系统存在两种相同的运动特征,其单位时间对数衰减率相同,频率互为相反数;系统中 3 个解支对应的单位时间对数衰减率和频率,总是随着阶次的增加而呈周期循环的;在同一解支下的各单值分支也呈周期性循环,即随着阶次的增加,其对应频率增加 4π 的整数倍,而单位时间对数衰减率保持不变。综上可知,集中阻尼弦系统的运动特性总是随着阶次的增加而重复变化,且变化周期与阻尼安装位置相关。

关键词 张紧弦; 本征值; 集中阻尼; 本征函数; 非经典线性系统
中图法分类号 O32 O302; **文献标志码** A

Properties of the Intrinsic Solution of a Four-point Centrally Damped String System

ZHENG Gang, WANG Bao-quan, WANG Meng-li, ZHANG Yong-shun, ZENG Guang-rong
(State Key Laboratory of Mountain Bridge and Tunnel Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

[**Abstract**] The tensioned string system with concentrated damping belongs to the hybrid dynamical system in the mechanical model, and the approximation method is usually used to solve the eigen values to meet the needs of engineering applications. In order to further clarify the vibration characteristics of this type of system, it is necessary to explore its eigen problems from the analytical point of view. For a four-point centrally damped string system, the algebraic form of its frequency equation was derived and simplified, the solution of the algebraic equation was obtained, and all the closed solutions of the original frequency equation were obtained after the commutative inverse process. The structure of the closed solutions of the system was discussed according to the fundamental theorem of algebra. It is found that there exist three sets of closed solutions in total, two of which are conjugate to each other. The structure of the closed solutions was discussed according to the fundamental theorem of algebra. The results show that the system has two identical motion characteristics, the logarithmic attenuation rate per unit time is the same, and the frequencies are opposite to each other. The logarithmic attenuation rate and frequency per unit time corresponding to the three de expenditures in the system always cycle periodically with the increase of order. Each single-valued branch under the same debranching also shows a periodic cycle, that is, with the increase of order, its corresponding frequency increases by an integer multiple of 4π, while the logarithmic attenuation rate per unit time remains unchanged. Based on the above, it can be concluded that the motion characteristics of the centralized damping chord system always change repeatedly with the increase of order, and the change period is related to the damping installation position.

[**Keywords**] taut string; eigenvalue; concentrated damping; eigenfunction; nonclassical linear system

对于非经典线性系统的振动分析,目前仍有许多问题。例如,对于一般线性阻尼系统求解问题,若采用拉氏变换法,其应用上要涉及非线性特征值计算,当对复杂系统分析时存在一定困难[1-4]。对于上述一系列相关问题目前尚无充分的研究。为更好解决此类问题,选择拉索-阻尼系统作为研究对

收稿日期: 2023-07-22 **修订日期**: 2024-04-22
基金项目: 国家自然科学基金(51978112, 52178272)
第一作者: 郑罡(1972—),男,汉族,四川宜宾人,博士,研究员,博士研究生导师。研究方向:斜拉索振动控制、桥梁抗震设计及结构健康监测。E-mail:zhenggang@cqjtu.edu.cn。

象,引入各种假设,将拉索-阻尼系统简化为带有集中阻尼的张紧弦[5-7],简称集中阻尼弦,再利用数值方法讨论其振动特性,其在工程中得到广泛应用。文献[8]利用数值方法,设置多个阻尼器控制斜拉索的振动问题。文献[9]考虑了拉索弯曲刚度对阻尼器性能的影响。近年来,随着学者们对于集中阻尼弦系统的研究越来越深入,为了简化计算,在已建立的阻尼器设计理论中引入一些假定条件,从而建立多种简化理论模型,进行理论分析[10-14]。现今,集中阻尼弦系统振动问题已通过理论分析和有限元法等方法被大量研究[15-17]。

对于集中阻尼弦系统的研究,文献[18]对涡轮机拉索减振技术的研究,采用单阻尼弦动力学方程的分区段列式,在近似条件下对方程求解。文献[19]引入狄拉克函数,实现动力学方程的全区段列式,并采用数值方法对其进行求解。文献[20]在动力学方程的全区段列式基础上分段求解,首次用解析方法得到频率方程的超越函数形式,但其仍用数值方法得到频率方程的解。文献[21]采用分区段形式的动力学方程,得到与文献[20]本质上一致的频率方程,同样用数值方法讨论系统的动力特性。由于频率方程是超越函数形式,一般无法求解,故上述文献均采用数值方法求解频率方程。文献[22]同样引入狄拉克函数,并且导出了另一种形式的频率方程,其本质上与文献[20]和文献[21]一致,在阻尼位于二分点(中点)的情况下,求得频率方程解析解,并讨论其若干性质。文献[23]则在阻尼位于三分点的情况下同样解得频率方程的闭合解,并分析其相对于二分点集中阻尼弦出现的若干新特性。作者在上述关于集中阻尼弦系统的研究中发现,当阻尼位于上述各分位点时,系统的解支呈现出一种周期排列的现象,这一现象会有助于更深入了解集中阻尼弦系统的振动问题。

为进一步明确集中阻尼弦系统振动特性,完善拉索阻尼系统的理论方法,进而更好地满足工程运用需求,以四分点集中阻尼弦系统为研究对象,求解本征问题。将频率方程换元为代数函数形式并求解,分析其本征解和本征函数的性质,讨论频率方程本征解各解支之间的关系和各解支下单值分支之间的关系,并分析系统各解支之间的循环特性,解得到各解支下单值分支之间的循环周期。

1 问题的提出

单集中阻尼的张紧弦系统如图1[19]所示,该张紧弦具有单位长度 l、单位分布质量密度 m 和单位张力 T,x、x_c和 c 分别为位置坐标、阻尼位置和阻尼系数。

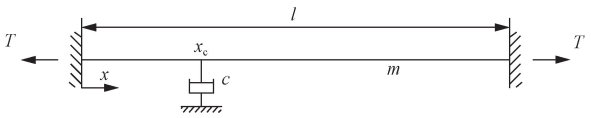

图1 带集中黏性阻尼的张紧弦[19]

Fig. 1 Taut string attached with concentrated viscous damping[19]

文献[20]给出了该拉索-阻尼系统无量纲化后的阻尼弦运动方程,可表示为

$$-\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}c\delta(x-x_c) \tag{1}$$

式(1)中:$w(x,t)$ 和 $\delta(x-x_c)$ 分别为挠曲函数、狄拉克函数,并且 $0<x_c<1$;t 为时间坐标。

设阻尼系统的解可表达为

$$w(x,t)=\varphi(x)e^{pt} \tag{2}$$

式(2)中:p 为 $w(x,t)$ 的复本征值,$p=\sigma+j\omega$,其中,σ 为本征值的实部,ω 为本征值的虚部,j 为虚数单位;$\varphi(x)$ 为 $w(x,t)$ 的复本征函数,$\varphi(x)=\varphi_R(x)+j\varphi_I(x)$,其中,$\varphi_R(x)$ 为本征函数的实部,$\varphi_I(x)$为本征函数的虚部。

文献[22]将式(1)的本征解分为两类:Ⅰ类本征解和Ⅱ类本征解,Ⅱ类本征解对应于阻尼位置处为本征函数驻点的情况,此时弦做无衰减振动,因Ⅱ类本征解对应于弦做无衰减振动,这种解是常规的,对此不展开讨论,重点讨论四分点集中阻尼弦Ⅰ类本征解及其性质。

2 本征解

Ⅰ类本征解对应于阻尼位置处不出现本征函数驻点的情况,其频率方程为[22]

$$\frac{\sinh[p(1-x_c)]\sinh(px_c)}{\sinh p}=-\frac{1}{c} \tag{3}$$

式(3)中:p 为本征值。

对一个阻尼(器)位置确定的集中阻尼弦系统,其无穷多个本征值,因其根据代数方程的根进行的分组,故将其称为解分支,简称解支,记为 $p^{(i)}$,上标 i 表示第 i 支解;一个解支下存在无数单值分支,记为 $p_s^{(i)}$。

在四分点阻尼的情形下,即 $x_c=\frac{1}{4}$时,频率方程可变形为

$$c\sinh\left(\frac{3}{4}p\right)\sinh\left(\frac{1}{4}p\right)+\sinh p=0 \tag{4}$$

利用双曲函数的倍角公式展开并化简式(4),得到方程为

$$\tanh^3\left(\frac{p}{4}\right)+\frac{4}{c}\tanh^2\left(\frac{p}{4}\right)+3\tanh\left(\frac{p}{4}\right)+\frac{4}{c}=0 \tag{5}$$

式(5)是关于 $\tanh\left(\frac{p}{4}\right)$ 的三次方程,求解该三次方程,再经过反双曲函数计算,得到频率方程闭合解的对数表达式为

$$p^{(1)} = 2\ln\left(\frac{1-\frac{4}{3c}+a+b}{1+\frac{4}{3c}-a-b}\right) \tag{6}$$

$$p^{(2)} = 2\ln\left(\frac{1-\frac{4}{3c}+\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}{1+\frac{4}{3c}-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a+\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}\right) \tag{7}$$

$$p^{(3)} = 2\ln\left(\frac{1-\frac{4}{3c}-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a+\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}{1+\frac{4}{3c}+\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a+\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}\right) \tag{8}$$

式中:j 为虚数单位;

$$a = \sqrt[3]{-\frac{64}{27c^3}+\sqrt{\left(\frac{64}{27c^3}\right)^2+\left(1-\frac{16}{9c^2}\right)^3}};$$

$$b = \sqrt[3]{-\frac{64}{27c^3}-\sqrt{\left(\frac{64}{27c^3}\right)^2+\left(1-\frac{16}{9c^2}\right)^3}}。$$

根据对数函数的多值特性,本征值 $p^{(i)}$ 的复数表达式为

$$p^{(1)} = \begin{cases} 2\left(\ln\left|\dfrac{1-\frac{4}{3c}+a+b}{1+\frac{4}{3c}-a-b}\right|+\mathrm{j}2s\pi\right), & c>2 \\ 2\left(\ln\left|\dfrac{1-\frac{4}{3c}+a+b}{1+\frac{4}{3c}-a-b}\right|+\mathrm{j}(2s+1)\pi\right), & 0<c<2 \end{cases} \tag{9}$$

$$p^{(2)} = 2\left(\ln\left|\frac{1-\frac{4}{3c}+\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}{1+\frac{4}{3c}-\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a+\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}\right|+\mathrm{j}\left\{\tan^{-1}\left[\frac{-2b-2\left(\frac{4}{3c}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)a}{1-\left(\frac{4}{3c}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(a^2-b^2)}\right]+2s\pi\right\}\right) \tag{10}$$

$$p^{(3)} = 2\left(\ln\left|\frac{1-\frac{4}{3c}-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a+\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}{1+\frac{4}{3c}+\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}a+\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}b}\right|-\mathrm{j}\left\{\tan^{-1}\left[\frac{-2b-2\left(\frac{4}{3c}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)a}{1-\left(\frac{4}{3c}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(a^2-b^2)}\right]+2s\pi\right\}\right) \tag{11}$$

式中:$s=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

应注意到式(6),当 $c=2$ 时,代数方程实根的值为 -1,则实根对应的本征值 $p^{(1)}$ 对数函数内分式等于 0,此时对数函数趋于负无穷;由于本征值 $p^{(2)}$ 和 $p^{(3)}$ 互为共轭,两者实部相等,故仅讨论本征值 $p^{(2)}$ 的实部,注意到式(7)为连续函数,对其求导,得到当 c 取 c_ω 时实部取得极大值。由此,可将阻尼 c 分为 $(0,\ c_\omega)$、$(c_\omega,\ 2)$ 和 $(2,\ +\infty)$ 区间进行分析。已知本征值 p 可表示为复数形式 $p=\sigma+\mathrm{j}\omega$,其中 j 为虚数单位,将本征值的实部记为 σ,则 $-\sigma$ 表示系统单位时间对数衰减率,为方便描述,统一称为衰减率;其虚部记为 ω,表示系统圆频率,简称为频率。从衰减率和频率两方面讨论本征值的性质。

2.1　衰减率

根据本征值复数表达式[式(9)~式(11)]的实部,得到衰减率随阻尼变化曲线(图 2)。

由图 2 可知,对于任意阻尼 c,系统均存在 3 个衰减率,其中衰减率 $-\sigma^{(2)}$ 和 $-\sigma^{(3)}$ 相等。当阻尼 c 取在 $(0,\ c_\omega)$ 区间时,系统衰减率总是单调递增的;当阻尼 c 取在 $(c_\omega,\ 2)$ 区间时,衰减率 $-\sigma^{(1)}$ 依然呈

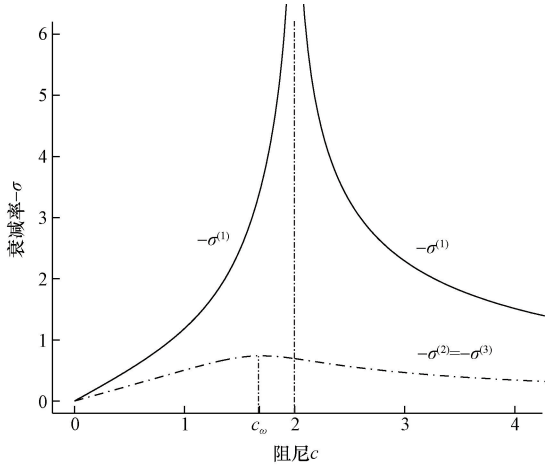

图 2　衰减率随阻尼变化曲线

Fig. 2　Variation curve of attenuation rate with damping attenuation

单调递增,而衰减率 $-\sigma^{(2)}$ 和 $-\sigma^{(3)}$ 呈单调递减,且当阻尼 c 取 c_ω 时衰减率 $-\sigma^{(2)}$ 和 $-\sigma^{(3)}$ 达到最大值;当阻尼 c 取在 $(c_\omega, +\infty)$ 区间时,系统衰减率总是呈单调递减,当 c 取 2 时,衰减率 $-\sigma^{(1)}$ 趋于无穷大。

以上分析表明,当阻尼 c 取 c_ω 时,所得衰减率 $-\sigma^{(2)}$ 和 $-\sigma^{(3)}$ 为本征值 $p^{(2)}$ 和 $p^{(3)}$ 的最优衰减率;当阻尼 c 取 2 时,本征值 $p^{(1)}$ 对应的衰减率 $-\sigma^{(1)}$ 趋于无穷大,表明系统运动被完全抑制。

2.2 频率

根据本征值复数表达式[式(9)~式(11)]的虚部,得到各阶频率 ω_k 随阻尼变化曲线(图 3)。

由图 3 可知,当阻尼 c 取 $(2, +\infty)$ 区间时,频率 $\omega_0^{(1)}$ 出现严格为 0 的情况,且不受阻尼影响,系统的频率为 0,表明系统的 0 阶运动无振荡特性。除 0 阶外,系统还有无穷多阶本征值,且同一解支对应的各阶本征值的虚部 ω 的差值为 2π 的整数倍;当阻尼 c 取 $(0, 2)$ 区间时,$\omega^{(1)}$ 所对应的各阶频率均为 2π 的整数倍,且在 $c=2$ 时频率出现跳跃。频率 $\omega^{(2)}$ 和 $\omega^{(3)}$ 关于 $\omega=0$ 对称,且频率随阻尼变化。

注意到,第 1、2、7、8…阶频率在各区间保持不变;第 5、6、11、12…阶频率从阻尼 c 在 $(0, 2)$ 区间向区间 $(2, +\infty)$ 变化时,频率会降低 2 阶次,此时需要注意的是,阶次虽发生跳跃,但频率是随阻尼连续变化的,其对应的本征函数也是随阻尼连续变化。

根据上述分析知,四分点阻尼弦系统在任意区间都存在频率随阻尼变化的情况。在阻尼区间 $(2, +\infty)$,两共轭的本征值所对应的系统频率虽由阻尼决定,但其对阻尼的导数为零。

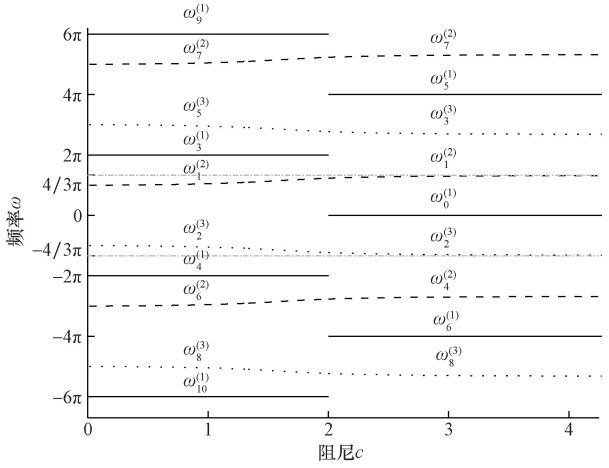

图 3 频率随阻尼变化曲线

Fig. 3 Variation curve of frequency with damping

3 解的关系

根据上述研究可知,解与解之间的关系问题实际上可分为解支之间的关系与同一解支下各单值分支之间的关系。分别从这两方面分析解之间的关系,并从中获得衰减率和频率的结构性性质。

3.1 同一解支内单值分支的关系

根据对数函数的多值特性,对于任意非零复数的无穷多个对数,其实部相同,任意两个对数的虚部相差 2π 的整数倍,根据此特性,针对四分点集中阻尼弦系,分别从本征值 $p_s^{(i)}$ 的实部和虚部,即衰减率和频率两方面,分析两者的性质,从而获得同一解支下各单值分支之间的关系。

由图 4 可知,同一解支下的本征值(即 i 相同时),其衰减率总是不变的,即同一解支下不同阶的单值分支共享相同的衰减率。当系统第 k_1 阶和第 k_2 阶本征值同属于第 i 个解支时($k_1 > k_2$),两者单位时间对数衰减率相等,经过相同时间 Δt 时,两阶模态的位移响应幅值均按指数项 $e^{-\sigma\Delta t}$ 衰减,故两阶模态的幅值衰减速度相等。同时注意到,同一解支中任何两个相邻的解共享相同的频率差 4π,即同一解支中各阶频率构成公差为 4π 的等差数列。

根据上述分析知,同一解支内,随着阶次的增加,其对应频率增加 4π 的整数倍,而衰减率保持不变,即同一解支内的单值分支,随着阶次的增长具有循环性。

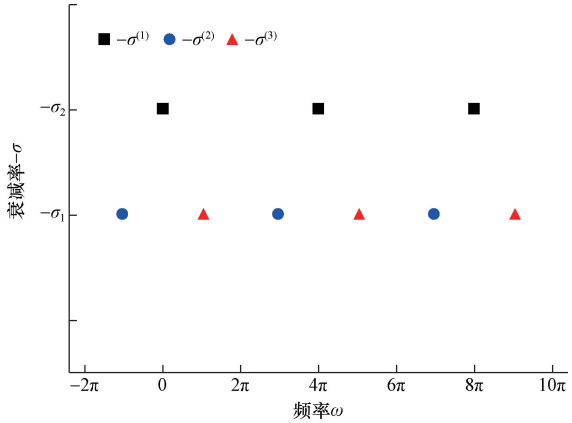

图 4 衰减率随频率阶次变化图

Fig. 4 Variation chart of attenuation rate as a function of frequency order

3.2 解支之间的关系

由式(9)~式(11)可知,每一解支下的单值分支都是以 4π 为周期“循环”。根据复变对数函数的多值特性,相对于本周期来说,其余周期内的本征值单值分支的衰减率均与前者一致,后者频率则平移了 4π 的整数倍,这意味着各个周期内的频率和衰减特性是“复制”和“粘贴”关系,故解支的循环,亦代表了性质的循环。

4 本征函数

将式(2)代入式(1),整理可得系统特征函数需

满足的常微分方程。

$$-\varphi''(x)+p^2\varphi(x)=-p\varphi(x)c\delta(x-x_c) \tag{12}$$

在零边界条件下求解方程式(12)即可求得系统的本征函数 $\varphi_k(x)$,可表示为

$$\varphi_k(x)=-c\left\{\frac{\sinh[p_k(1-x_c)]\sinh p_k x}{\sinh p_k}-\mu(x-x_c)\sinh[p_k(x-x_c)]\right\} \tag{13}$$

式(13)中:k 为特征函数的阶次,k 是正整数;p_k 为第 k 阶特征值,需通过系统的复特征方程解得;$\mu(x-x_c)$ 为单位阶跃函数。

将 $x_c=\frac{1}{4}$ 代入本征函数式[式(13)]中,并化简为分段函数。

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sinh px, & x\leqslant\frac{1}{4}\\ A\sinh[p(1-x)], & x>\frac{1}{4}\end{cases} \tag{14}$$

式(14)中:复系数 $A=\dfrac{\sinh\frac{p}{4}}{\sinh\frac{3p}{4}}$。

由于本征值 $p^{(1)}$ 的频率在阻尼 c 取 2 时出现跳跃,故分两个区间(2, +∞)和(0, 2)讨论本征值 $p^{(1)}$ 对应的本征函数 $\varphi^{(1)}(x)$。

本征函数 $\varphi_k^{(1)}(x)$ 在阻尼 c 大于 2 时,由于本征值 $p^{(1)}$ 存在频率严格为 0 的情况,故此时具有 0 阶本征函数 $\varphi_0^{(1)}(x)$,其为实双曲正弦函数,可表示为

$$\varphi_0^{(1)}(x)=\begin{cases}\sinh\sigma x, & x\leqslant\frac{1}{4}\\ A_1\sinh[\sigma(1-x)], & x>\frac{1}{4}\end{cases} \tag{15}$$

式(15)中:常系数 $A_1=\dfrac{\sinh\frac{\sigma}{4}}{\sinh\frac{3\sigma}{4}}$。

系统除 0 阶本征函数外还存在 1 阶及以上无穷多阶本征函数,将本征值代入本征函数分段表达式[式(13)]中可得复本征函数为

$$\varphi_k^{(1)}=\begin{cases}\sinh(\sigma x)\cos(\omega_k x)+\\ \quad \mathrm{j}\cosh(\sigma x)\sin\omega_k x, & x\leqslant\frac{1}{4}\\ A\{\sinh[\sigma(1-x)]\cos[\omega_k(1-x)]+\\ \quad \mathrm{j}\cosh[\sigma(1-x)]\sin[\omega_k(1-x)], & x>\frac{1}{4}\end{cases} \tag{16}$$

式(16)中:复系数 $A=\dfrac{\sinh\frac{\sigma+\mathrm{j}\omega_k}{4}}{\sinh\frac{3(\sigma+\mathrm{j}\omega_k)}{4}}$。

在阻尼 c 位于(0, 2)区间存区间,系统不存在 0 阶本征函数,但存在 1 阶及以上无穷多阶本征函数。由复本征函数表达式(16)可得

$$\varphi_1^{(1)}=\begin{cases}\sinh(\sigma x)\cos(\omega_1 x)+\\ \quad \mathrm{j}\cosh(\sigma x)\sin\omega_1 x, & x\leqslant\frac{1}{4}\\ A\{\sinh[\sigma(1-x)]\cos[\omega_1(1-x)]+\\ \quad \mathrm{j}\cosh[\sigma(1-x)]\sin[\omega_1(1-x)]\}, & x>\frac{1}{4}\end{cases} \tag{17}$$

由于本征值 $p^{(2)}$ 和 $p^{(3)}$ 互为共轭,两者本征函数本质上一致,故本文仅讨论本征值 $p^{(2)}$ 对应的本征函数 $\varphi^{(2)}(x)$。又有系统存在 1 阶及以上无穷多阶本征函数,由复本征函数表达式(16)可得

$$\varphi_1^{(2)}=\begin{cases}\sinh(\sigma x)\cos(\omega_1 x)+\\ \quad \mathrm{j}\cosh(\sigma x)\sin(\omega_1 x), & x\leqslant\frac{1}{4}\\ A\{\sinh[\sigma(1-x)]\cos[\omega_1(1-x)]+\\ \quad \mathrm{j}\cosh[\sigma(1-x)]\sin[\omega_1(1-x)], & x>\frac{1}{4}\end{cases} \tag{18}$$

由本征函数 $\varphi_1^{(2)}(x)$ 与本征函数 $\varphi_1^{(1)}(x)$ 两式相比,两者在形状变化上有很大不同,前者的形状在整个阻尼区间的变化幅度都不大,仅在小阻尼区间,当阻尼正向趋近于 0 时,虚部的形状从不连续变成连续;而后者的形状在整个阻尼区间变化都很明显,并且无论阻尼趋近于正无穷还是 0,其实、虚部的形状都是不连续的。

5　结论

将四分点单集中阻尼弦系统的阻尼位置参数带入频率方程一般式中,将频率方程化简为三次代数方程,获得原频率方程本征解,对本征解的结构与性质进行讨论,分析了集中阻尼弦系统解支之间的周期性,得出如下结论。

(1)系统频率方程存在一组共轭解支,其对应的衰减率相等,频率相反,即两解支对应的系统运动特征相同。

(2)各单值分支对应的频率以 4π 为周期进行“循环”。其一个周期内包含系统的三个衰减率和频率,且系统衰减率和频率总是随着周期循环而重复出现的。即系统的运动特性总是随着阶次的增加而重复变化。

(3)同一解支下的本征值,其衰减率总是不变的,相邻的频率差为4π,即同一解支下不同阶的单值分支共享相同的衰减率,各阶频率构成公差为4π的等差数列。

从纯解析角度探讨了四分跨集中阻尼弦系统的振动特性,可为后续拉索阻尼系统的工程运用提供参考价值。然而,现有的研究进展仍是欠缺的,还需根据初始条件确定本征函数叠加时的待定系数,此问题将在后续论文中研讨。

参 考 文 献

[1] 胡海昌. 多自由度线性阻尼系统的振动问题[J]. 固体力学学报, 1980(1): 30-37.
Hu Haichang. Vibration of multi degree of freedom linear damping system[J]. Journal of Solid Mechanics, 1980(1): 30-37.

[2] 张阿舟, 朱德懋. 阻尼系统的振动分析[J]. 南京航空航天大学学报, 1983(1): 1-16.
Zhang Azhou, Zhu Demao. Vibration analysis of damping system [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 1983(1): 1-16.

[3] 吕振华, 冯振东, 邬惠乐. 也论复模态振动分析理论的几个问题[J]. 振动与冲击, 1989(4): 20-27, 13.
Lü Zhenhua, Feng Zhendong, Wu Huile. On several problems of complex mode vibration analysis theory[J]. Journal of Vibration and Shock, 1989(4): 20-27, 13.

[4] 俞瑞芳, 周锡元. 具有过阻尼特性的非比例阻尼线性系统的复振型分解法[J]. 建筑结构学报, 2006(1): 50-59.
Yu Ruifang, Zhou Xiyuan. Complex mode superposition method for non-classically damped linear system with over-critical damping peculiarity[J]. Journal of Building Structures, 2006(1): 50-59.

[5] Tabatabai H P E, Mehrabi A B. Design of mechanical viscous dampers for stay cables[J]. Journal of Bridge Engineering, 2000, 5(2): 114-123.

[6] Krenk S. Complex modes and frequencies in damped structural vibrations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 270(4/5): 981-996.

[7] Johnson A E, Baker A G, Spencer F B, et al. Semiactive damping of stay cables[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(1): 1-11.

[8] Yu Z, Xu Y L. Mitigation of three-dimensional vibration of inclined sag cable using discrete oil dampers: I. formulation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 214(4): 659-673.

[9] Main J A, Asce A M, Jones N P, et al. Vibration of tensioned beams with intermediate damper Ⅱ: damper near a support[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(4): 379.

[10] 梁栋, 孙利民, 程纬. 斜拉桥主梁振动对拉索阻尼器减振效果的影响分析[J]. 工程力学, 2008(5): 110-116.
Liang Dong, Sun Limin, Cheng Wei. Effect of girder vibration on performance of cable damper for cable-stayed bridge[J]. Engineering Mechanics. 2008(5): 110-116.

[11] 罗帅, 刘红军, 王刚. 斜拉索-调谐质量阻尼器系统复模态分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2012, 44(6): 58-61, 148.
Luo Shuai, Liu Hongjun, Wang Gang. Complex modal analysis of stay cable with tuned mass damper system[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2012, 44(6): 58-61, 148.

[12] Battini J M. Analysis of dampers for stay cables using non linear beam elements[J]. Structures, 2018, 16: 45-49.

[13] Zhou H J, Huang X G, Xiang N, et al. Free vibration of a taut cable with a damper and a concentrated mass[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2018, 25(11): e2251.

[14] 汪峰, 李春清, 刘章军, 等. 考虑附加刚度的黏滞阻尼器-斜拉索参数振动模型及控制分析[J]. 振动与冲击, 2020, 39(22): 183-191.
Wang Feng, Li Chunqing, Liu Zhangjun, et al. Parametric vibration model for a viscous damper-cable system considering the effect of additional stiffness[J], Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(22): 183-191.

[15] 汪峰, 陈福青, 文晓旭. 斜拉桥塔-索-桥面连续耦合振动模型及其影响因素分析[J]. 科学技术与工程, 2015, 15(10): 116-122, 135.
Wang Feng, Chen Fuqing, Wen Xiaoxu. Continuous coupling vibration model of cable-stayed bridge tower-cable-deck and its influencing factors analysis[J]. Science Technology and Engineering, 2015, 15(10): 116-122, 135.

[16] 徐明骁, 葛耀君, 马婷婷, 等. 大跨度斜拉索参数振动研究[J]. 科学技术与工程, 2011, 11(19): 4509-4515.
Xu Mingxiao, Ge Yaojun, Ma Tingting, et al. Research on parametric oscillation of super long cables[J]. Science Technology and Engineering, 2011, 11(19): 4509-4515.

[17] 路国闯, 李新梅, 商利, 等. 不同覆冰状态下导线风致振动响应仿真[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(11): 4677-4685.
Lu Guochuang, Li Xinmei, Shang Li, et al. Simulation of wind-induced vibration response of conductors under different icing conditions[J]. Science Technology and Engineering, 2023, 23(11): 4677-4685.

[18] Carne T G. Guy cable design and damping for vertical axis wind turbines[M]. Albuquerque, N. M.: Sandia National Laboratories, 1981.

[19] Pacheco B M, Fujino Y, Sulekh A. Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(6): 1961-1979.

[20] Krenk S. Vibrations of a taut cable with an external damper[J]. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(4): 772.

[21] Main J A, Member S, Jones N P. Free vibrations of taut cable with attached damper I: linear viscous damper[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(10): 1062-1071.

[22] 郑罡, 李章瑜, 郭增伟, 等. 集中阻尼弦本征解的性质[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(9): 980-990.
Zheng Gang, Li Zhangyu, Guo Zengwei, et al. Properties of the eigen solution of a taut string with concentrated damping[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(9): 980-990.

[23] 郑罡, 廖伟, 王梦丽, 等. 三分点阻尼弦的本征解及其性质[J]. 重庆大学学报, 2023, 46(6): 14-23.
Zheng Gang, Liao Wei, Wang Mengli, et al. The eigen solution and properties of a taut string with concentrated damping at one-third-span[J]. Journal of Chongqing University, 2023, 46(6): 14-23.