



DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2304910

引用格式:范昆龙,王生海,仇伟晗,等. 3UPU-UP 并联平台可操作性与工作空间分析[J]. 科学技术与工程, 2024, 24(16): 6935-6942.

Fan Kunlong, Wang Shenghai, Qiu Weihang, et al. 3UPU-UP parallel platform operability and workspace analysis[J]. Science Technology and Engineering, 2024, 24(16): 6935-6942.

## 3UPU-UP 并联平台可操作性与工作空间分析

范昆龙, 王生海\*, 仇伟晗, 牛安琪, 韩广冬, 陈海泉, 邱建超

(大连海事大学轮机工程学院, 大连 116026)

**摘要** 6支链并联平台存在着复杂的位置约束,并且当控制算法失效时对机械结构容易造成损坏,因此,针对一种3UPU-UP 并联平台对其进行运动学可操作性与工作空间分析。首先通过矢量法与运动学的分析,得出了3UPU-UP 并联平台运动学模型,以此为基础,首次将串联机械臂可操作度的评价指标与3UPU-UP 并联平台的机构结构特性相结合,对3UPU-UP 并联平台的可操作度进行了计算、分析和可视化处理;并将蒙特卡洛法与正运动学相结合对并联平台的工作空间进行了计算、分析和可视化处理。能够更加直观、完整表述并联平台的可操作度和工作空间。研究成果为3UPU-UP 并联平台的设计提供了理论依据并证实其理论上的可行性。

**关键词** 并联平台; 运动学; 可操作性; 蒙特卡洛法; 工作空间

**中图分类号** U664.4<sup>+</sup>3; **文献标志码** A

### 3UPU-UP Parallel Platform Operability and Workspace Analysis

FAN Kun-long, WANG Sheng-hai\*, QIU Wei-han, NIU An-qi, HAN Guang-dong,

CHEN Hai-quan, QIU Jian-chao

(Marine Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

**[Abstract]** The 6-branch chain parallel platform has complex positional constraints and is prone to damage to the mechanical structure when the control algorithm fails. Therefore, the kinematic operability and workspace of a 3UPU-UP parallel platform was analysed. Firstly, the kinematic model of the 3UPU-UP parallel platform was derived through the analysis of vector method and kinematics, based on which, the evaluation index of the operability of the tandem robotic arm was firstly combined with the characteristics of the mechanism structure of the 3UPU-UP parallel platform. The operability of the 3UPU-UP parallel platform was computed, analyzed and visualized. The Monte-Carlo method was combined with the orthogonal kinematics to analyze the workspace of the 3UPU-UP parallel platform. The Monte-Carlo method and positive kinematics were combined to calculate, analyze and visualize the workspace of the parallel platform. The workspace of the parallel platform can be expressed more intuitively and completely. The research results provide the theoretical basis for the design of the 3UPU-UP parallel platform and confirm its theoretical feasibility.

**[Keywords]** parallel platform; kinesiology; operability; Monte-Carlo method; workspace

随着社会工业化的发展,工业机器人在生产资料的生产与加工过程中的比重越来越高。常见的工业机器人平台可分为串联机构和并联机构。其中,并联机构相较于串联机构具有许多优点,如无累积误差、高刚度、高精度和快速反应速度等,在工业领域受到了广泛关注。此外,并联机构还具有复杂的强耦合性机械结构,因此也成为广泛研究的对象。

邱建超等<sup>[1]</sup>设计了一种三自由度海上廊桥试

验台,并对其进行实验,从实际样机的层面说明3UPU-UP 并联平台具有研究价值。Zhao 等<sup>[2]</sup>提出了一种3UPU-UP 三自由度混合驱动并联机构,并对其进行运动学分析和尺度综合。Hu 等<sup>[3]</sup>通过闭环法推导了平台的逆运动学方程,通过Newton-Rapson 迭代求解了平台的正运动学方程。Niu 等<sup>[4]</sup>设计了一种新型的3UPU/UP-RRP 串并联混合结构海上廊桥。Qiu 等<sup>[5]</sup>采用虚功原理对稳定平台进行动力学建模并建立了动荷载作用下的海上廊桥动力学模

收稿日期: 2023-07-03 修订日期: 2024-03-20

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFC0309003); 国家自然科学基金(51579026, 51779026); 中央高校基本科研业务费专项资金(3132022207); 国家自然科学基金青年科学基金(5210396)

第一作者: 范昆龙(2000—),男,汉族,河南商丘人,硕士研究生。研究方向:海上稳定廊桥技术。E-mail:15660766063@163.com。

\* 通信作者: 王生海(1988—),男,土家族,湖北利川人,博士,副教授。研究方向:海上运动补偿技术、绳索驱动机器人技术。E-mail:shenghai\_wang@dlnu.edu.cn。

型。Tang 等<sup>[6]</sup>提出了一种用于船舶波浪补偿的改进型六自由度混联串并联平台,利用螺旋理论详细分析了系统中旋转轴和平移轴的位置和姿态。上述研究是对并联机构的运动学及动力学建模与其运动特性的研究,未对性能进行分析。Russo 等<sup>[7]</sup>提出了一种几何公式,通过使用递归方法来描述平行机械手的工作空间,并分析模型和数值模拟的优点和局限性。Yin 等<sup>[8]</sup>通过运动学分析得到机构的雅克比矩阵,并依据矩阵的 3 种性能参数对机构的奇异性进行了分析,借助蒙特卡洛法,求得机构的工作空间。Liu 等<sup>[9]</sup>介绍了三自由度(3-DOF)3-RRR 平面并联机械手(PPM)工作模式转换的奇异性分析和路径规划,并分析了 8 种工作模式的工作空间组合可有效扩展机械手的工作空间,对机构的性能做出一定的分析,但对机构整体可操作性及工作空间研究内容还相对较少。

鉴于此,首次将串联机械臂可操作度的评价指标与 3UPU-UP 并联平台的机构结构特性相结合,对 3UPU-UP 并联平台的可操作度进行计算、分析和可视化处理;并将蒙特卡洛法与正运动学相结合对并联平台的工作空间进行计算、分析和可视化处理,能够更加直观、完整表述并联平台的可操作度和工作空间。针对 3UPU-UP 并联平台可操作性与工作空间的问题。首先,通过矢量法与运动学分析计算得出 3UPU-UP 并联平台运动学模型。然后,以运动学模型为基础对并联平台的可操作性进行分析。接着,使用蒙特卡洛法结合正运动学对并联平台的工作空间进行分析,并进行可视化处理。

## 1 运动学分析

### 1.1 坐标系建立

图 1 为并联平台坐标原理图。所设计的 3UPU-UP 并联平台,由上下平台、3 个完全相同的 UPU 驱

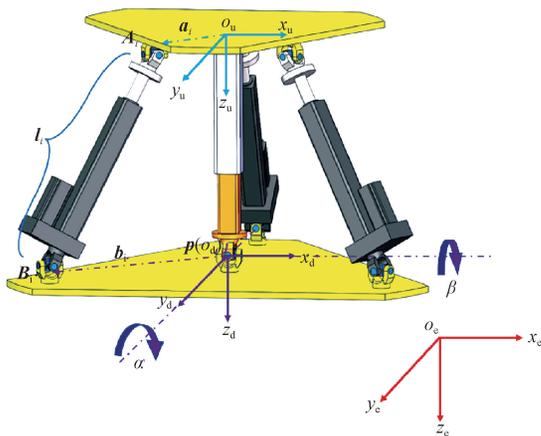


图 1 并联平台坐标示意图

Fig. 1 Schematic diagram of parallel platform coordinates

动支链以及一个 UP 随动支链组成(其中,U 为虎克铰,P 为移动支链)。设  $o_e-x_e y_e z_e$  为参考坐标系,属于惯性坐标系;取下平台为动平台,在中心处建立动坐标系  $o_d-x_d y_d z_d$ ,其中  $z_d$  轴垂直于下平台;取上平台为定平台,在中心处建立坐标系  $o_u-x_u y_u z_u$ ,各轴方向与参考系一致。其中,上支链铰接点定义为  $A_i (i = 1, 2, 3)$ ,动平台处下铰接点定义为  $B_i (i = 1, 2, 3)$ 。

### 1.2 位姿分析

由图 1 可知,对于每个支链可建立矢量方程为

$$a_i + l_i = p + b_i \quad (1)$$

式(1)中: $a_i$ 为从坐标系原点  $o_u$  指向  $A_i$  的矢量; $l_i$ 为支链  $i$  的向量; $p$ 为动平台坐标系原点处的位置矢量; $b_i$ 为动平台坐标系原点  $o_d$  指向  $B_i$  的矢量。

根据式(1)计算得出,支链  $i$  的单位矢量为

$$s_i = \frac{p + b_i - a_i}{l_i} \quad (2)$$

式(2)中: $l_i$ 为支链  $i$  的长度。

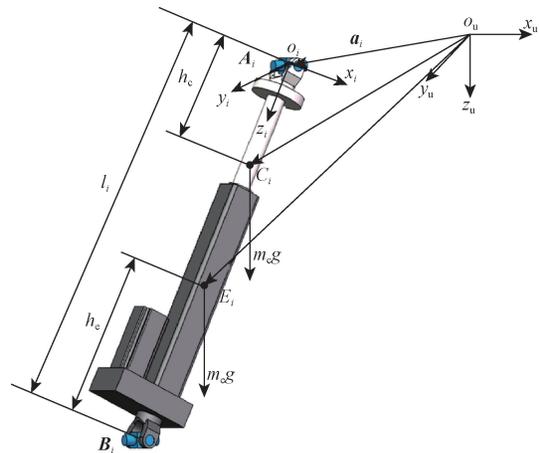
如图 2 所示,建立如下的分支坐标系,分支系原点取支链上端铰接点, $z_i$ 轴沿支链方向建立,其余方向由分支系的旋转矩阵  ${}_{o_u}R_i$  求出。

$${}_{o_u}R_i = \begin{bmatrix} c\varphi_i c\gamma_i & -s\varphi_i & c\varphi_i s\gamma_i \\ s\varphi_i c\gamma_i & c\varphi_i & s\varphi_i s\gamma_i \\ -s\gamma_i & 0 & c\gamma_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)中: $s = \sin$ ;  $c = \cos$ ;  $\varphi_i$ 为绕  $z_u$  轴的旋转矩阵; $\gamma_i$ 为对  $y_u$  轴一次旋转之后再旋转的角度。

$$\text{其中, } s_i = \begin{bmatrix} c\varphi_i s\gamma_i \\ s\varphi_i s\gamma_i \\ c\gamma_i \end{bmatrix}.$$

联立式(1)~式(3)可以建立以支链的单位矢量  $s_i$  表述其支链的位姿。



$m_c$  为驱动杆的质量; $m_e$  为驱动缸的质量; $g$  为重力加速度

图 2 支链坐标示意图

Fig. 2 Diagram of branch chain coordinates

由图 2 可以建立支链中矢量关系,可表示为

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + h_c \mathbf{s}_i \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i + (l_i - h_c) \mathbf{s}_i \quad (5)$$

式(4)中:  $\mathbf{c}_i$  为原点  $o_u$  到杆质心  $C_i$  处的矢量;  $h_c$  为质心  $C_i$  到  $A_i$  的距离;  $\mathbf{e}_i$  为原点  $O_u$  到缸套质心  $E_i$  处的矢量;  $h_c$  为缸套质心  $E_i$  到  $B_i$  的距离。

### 1.3 速度与加速度分析

#### 1.3.1 动平台速度分析

设动平台相对于定平台在全局坐标系下的位置矢量为  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ , 动平台相对于全局坐标系的旋转角度为  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T$ , 因此动平台的位置矢量和位姿可表示为

$$\mathbf{D}_p = [\mathbf{p}^T \ \boldsymbol{\theta}^T]^T \quad (6)$$

在动平台位姿旋转表示中的旋转矩阵,按照  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的顺序进行旋转,旋转矩阵表示为

$${}^u_d \mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x \quad (7)$$

式(7)中:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

动平台速度  $\mathbf{v}_p$  可以用动平台位置矢量对时间的一阶导数表示;动平台角速度  $\boldsymbol{\omega}_p$  用系数矩阵与欧拉角对时间的一阶导数表示,即

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{T}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (8)$$

$$\text{式(8)中: } \mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} c\theta_y c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ c\theta_y s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ -s\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

动平台的速度矩阵可表示为

$$\dot{\mathbf{D}}_p = [\mathbf{v}_p^T \ \boldsymbol{\omega}_p^T]^T \quad (9)$$

式(9)中:  $\mathbf{v}_p$  为动平台线速度;  $\boldsymbol{\omega}_p$  为动平台角速度。

#### 1.3.2 支链速度与加速度分析

支链  $i$  中  $B_i$  在动平台坐标系中速度  $\mathbf{v}_{Bi}$  由式(1)的等号右端求导得出,即

$$\mathbf{v}_{Bi} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega}_p \mathbf{b}_i \quad (10)$$

$B_i$  在支链坐标系中的速度为  $\mathbf{v}_{Bi}$  通过转换便为  ${}^i \mathbf{v}_{Bi}$ , 可表示为

$${}^i \mathbf{v}_{Bi} = {}^i \mathbf{R}_{o_u} \mathbf{v}_{Bi} \quad (11)$$

式(11)中:  ${}^i \mathbf{R}_{o_u}$  为支链  $i$  相对于上平台的旋转矩阵。

${}^i \mathbf{v}_{Bi}$  也可以在支链坐标系中对式(1)的左端进行求导,即

$${}^i \dot{\mathbf{v}}_{Bi} = \dot{l}_i {}^i \boldsymbol{\omega}_i {}^i \mathbf{s}_i + \dot{l}_i {}^i \mathbf{s}_i \quad (12)$$

支链  $i$  中  $B_i$  在动平台坐标系中加速度  $\dot{\mathbf{v}}_{Bi}$  由式(10)的等号右端求导得出,即

$$\dot{\mathbf{v}}_{Bi} = \dot{\mathbf{v}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\omega}_p (\boldsymbol{\omega}_p \mathbf{b}_i) \quad (13)$$

式(13)中:  $\dot{\mathbf{v}}_p$  为  $\mathbf{v}_p$  对时间进行求导。

加速度  $\dot{\mathbf{v}}_{Bi}$  在支链坐标系中可表示为  ${}^i \dot{\mathbf{v}}_{Bi}$ , 即

$${}^i \dot{\mathbf{v}}_{Bi} = {}^i \mathbf{R}_{o_u} \dot{\mathbf{v}}_{Bi} \quad (14)$$

式(14)中:  ${}^i \mathbf{R}_{o_u} = {}^u \mathbf{R}_i^T$ 。

加速度  ${}^i \dot{\mathbf{v}}_{Bi}$  也可由式(12)求导得出,即

$${}^i \dot{\mathbf{v}}_{Bi} = \dot{l}_i {}^i \mathbf{s}_i + l_i {}^i \boldsymbol{\omega}_i ({}^i \boldsymbol{\omega}_i {}^i \mathbf{s}_i) + 2\dot{l}_i {}^i \boldsymbol{\omega}_i {}^i \mathbf{s}_i \quad (15)$$

式(15)中:  ${}^i \mathbf{s}_i$  为支链  $i$  在其所在支链坐标系中的单位矢量;  ${}^i \boldsymbol{\omega}_i$  为支链  $i$  在其所在支链坐标系中的角速度。

用  ${}^i \mathbf{s}_i$  点乘式(12)两端可得到速度  ${}^i \mathbf{v}_{Bi}$  在沿支链方向的分量,即

$$\dot{l}_i = {}^i \mathbf{v}_{Bi,z} \quad (16)$$

由图 2 中所建立的支链坐标系知,速度  ${}^i \mathbf{v}_{Bi}$  在  $z_i$  轴方向的分量  ${}^i v_{Bi,z}$  即为支链伸缩的线速度。

各支链的角速度可通过  ${}^i s_i$  叉乘得

$${}^i \boldsymbol{\omega}_i = \frac{{}^i \mathbf{s}_i \times {}^i \mathbf{v}_{Bi}}{l_i} = \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} {}^i v_{Bi,y} \\ {}^i v_{Bi,x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

支链杆、缸套质心处的速度通过对式(4)、式(5)进行求导得出,即

$${}^i \mathbf{v}_{C_i} = h_c {}^i \boldsymbol{\omega}_i {}^i \mathbf{s}_i = \frac{h_c}{l_i} \begin{bmatrix} {}^i v_{Bi,x} \\ {}^i v_{Bi,y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{v}_{E_i} &= (l_i - h_c) {}^i \boldsymbol{\omega}_i {}^i \mathbf{s}_i + \dot{l}_i {}^i \mathbf{s}_i \\ &= \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} (l_i - h_c) {}^i v_{Bi,x} \\ (l_i - h_c) {}^i v_{Bi,y} \\ l_i {}^i v_{Bi,z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

支链杆、缸套质心处的加速度通过对式(18)、式(19)进行求导得出,即

$$\begin{aligned} {}^i \dot{\mathbf{v}}_{C_i} &= h_c {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i {}^i \mathbf{s}_i + h_c {}^i \boldsymbol{\omega}_i ({}^i \boldsymbol{\omega}_i {}^i \mathbf{s}_i) \\ &= \frac{h_c}{l_i^2} \begin{bmatrix} l_i \dot{l}_i {}^i v_{Bi,z} - 2 {}^i v_{Bi,z} {}^i v_{Bi,x} \\ l_i \dot{l}_i {}^i v_{Bi,y} - 2 {}^i v_{Bi,z} {}^i v_{Bi,y} \\ - ({}^i v_{Bi,x}^2 + {}^i v_{Bi,y}^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} {}^i\dot{v}_{Ei} &= \ddot{l}_i {}^i s_i + (l_i - h_e) {}^i \omega_i {}^i s_i + \\ &\quad (l_i - h_e) {}^i \omega_i ({}^i \omega_i {}^i s_i) + 2\dot{l}_i {}^i \omega_i {}^i s_i \\ &= \frac{1}{l_i^2} \begin{bmatrix} l_i(l_i - h_e) {}^i \dot{v}_{Bi,x} + 2h_e {}^i v_{Bi,z} {}^i v_{Bi,x} \\ l_i(l_i - h_e) {}^i \dot{v}_{Bi,y} + 2h_e {}^i v_{Bi,z} {}^i v_{Bi,y} \\ l_i^2 \dot{v}_{Bi,z} + h_e ({}^i v_{Bi,x}^2 + {}^i v_{Bi,y}^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

#### 1.4 Jacobi 矩阵分析

在研究中可以通过 Jacobi 矩阵清晰的建立支链与动平台之间的运动映射关系。

由式(9)可以对式(10)进行改写,建立  $v_{Bi}$  与  $\dot{D}_p$  映射关系,即

$$v_{Bi} = J_{Bi} \dot{D}_p \quad (22)$$

$$\text{式(22)中: } J_{Bi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & B_{i,z} & -B_{i,y} \\ 0 & 1 & 0 & -B_{i,z} & 0 & B_{i,x} \\ 0 & 0 & 1 & B_{i,y} & -B_{i,x} & 0 \end{bmatrix}。$$

对式(11)进行改写为

$${}^i v_{Bi} = {}^i J_{Bi} \dot{D}_p \quad (23)$$

$$\text{式(23)中: } {}^i J_{Bi} = {}^i R_O J_{Bi} = \begin{pmatrix} {}^i J_{Bi,x} \\ {}^i J_{Bi,y} \\ {}^i J_{Bi,z} \end{pmatrix}。$$

设3条支链的输入速度为  $\dot{q}$ ,  $\dot{q} = [i_1 \ i_2 \ i_3]^T$ , 由式(16)可以得出支链输入速度与动平台之间的速度映射关系为

$$\dot{q} = J_p \dot{D}_p \quad (24)$$

$$\text{式(24)中: } J_p = [{}^1 J_{B1,z} \quad {}^2 J_{B2,z} \quad {}^3 J_{B3,z}]^T。$$

同理式(17)~式(19)可以进行改写为用 Jacobi 矩阵表示的映射关系。

#### 1.5 正运动学分析

相较于运动学的反解,正运动学的分析较为复杂<sup>[10-11]</sup>。对于正运动学的分析的数学方法有很多,利用 Newton-Raphson 迭代法对其进行分析。

Newton-Raphson 迭代法利用上述反解得出的运动学方程进行迭代运算。利用初始支链状态逐步迭代计算最终目标,最后对动平台位姿进行计算。

由式(24)两端分别乘以  $\Delta t$  得

$$\Delta D_p = J \Delta l \quad (25)$$

式(25)中:  $J = J_p^+$ , 其中  $J_p^+$  为  $J_p$  广义逆;  $\Delta D_p$  为动平台位姿之差;  $\Delta l$  为支链位姿之差。

因此由 Newton-Raphson 迭代法得

$$D_p^{i+1} = D_p^i + J(l_m - \hat{l}^i) \quad (26)$$

式(26)中:  $l_m$  为目标支链位姿;  $\hat{l}^i$  为第  $i$  步时支链位

姿;  $D_p^i$  为第  $i$  步时动平台位姿。

## 2 可操作性分析

### 2.1 可操作性理论建模

在并联机构的设计过程中需要对机构的可操作性进行分析。可操作性的分析,反映了机构在一定空间内操作能力。分析首先通过运动学得出动平台与支链之间的映射 Jacobi 矩阵,然后对量化可操作性椭圆和可操作度进行分析<sup>[12-13]</sup>。

由式(24)得出动平台与支链的伸缩速度之间的关系,即

$$\dot{D}_p = J \dot{q} \quad (27)$$

因为对于支链速度  $\|\dot{q}\| \leq 1$  能够形成以末端速度的集合形成三维欧几里得空间的椭球体。最大末端速度的方向为椭球体主轴半径最长的方向,最小末端速度的方向为椭球体主轴半径最短的方向。通过椭球体与球体形状的相近程度大小,从而反应动平台在任何运动方位输出能力的一致程度。

对于可操作性椭圆可以通过下式描述,即

$$\dot{D}_p^T J_p^T J_p \dot{D}_p \leq 1, v \in R(J) \quad (28)$$

式(28)中:  $R(J)$  为  $J_p$  的值域。

通过对 Jacobi 矩阵  $J$  进行奇异值分解可以求出可操作性椭圆的主轴。Jacobi 矩阵  $J$  奇异值分解为

$$J = U \Sigma V^T \quad (29)$$

式(29)中:  $U$  为  $6 \times 6$  正交矩阵;  $V$  为  $3 \times 3$  正交矩阵。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \\ & & & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(30)中:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  为  $J$  的奇异值。

将矩阵  $U$  第  $i$  列由  $u_i$  表示,因此可操作性椭圆的主轴用  $\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \sigma_3 u_3$  表示。

其中,对于可操作性椭圆,当可操作性椭圆与完美球体的差距越小,其可操作性越优异。对于其分析可由式(31)~式(33)进行。

完美球体的近似半径为

$$r = (\|\sigma_1 u_1\|_2 \|\sigma_2 u_2\|_2 \|\sigma_3 u_3\|_2)^{\frac{1}{3}} \quad (31)$$

距离完美球体的差距指数  $D$  为

$$D = \left[ (\|\sigma_1 u_1\|_2 - r)^2 + (\|\sigma_2 u_2\|_2 - r)^2 + (\|\sigma_3 u_3\|_2 - r)^2 \right] r^{-1} \quad (32)$$

式(32)中:  $\|\cdot\|_2$  为取向量二范数。

当  $D = 0$  时,表示椭圆完全与球体相同;当  $D >$

0 时,表示椭球与球体之间存在差距,  $D$  越大,差距越明显。

通过可操作性椭球体积  $c_m w$  表示并联机构的可操作性,因为  $c_m$  为常数,因此,利用  $w$  来表示可操作度的变化情况,  $w$  可表示为

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \tag{33}$$

### 2.2 可操作性实例计算与分析

船舶运动可以假定为一系列正弦运动叠加,作为海洋工程界常用的简化方法之一。采用这种正弦运动作为激励是因为本文机械结构具有一定的对称性,这使得通过规律激励得到的受动分支的力也具有一定的规律,得到的结果更加直观,进而与后续的分析进行校正。

对海浪进行数值模拟,当船舶在不规则波浪中运动时,假设是规则正/余弦运动响应的叠加<sup>[4]</sup>。设该海上廊桥随舰船运动的位姿参数的正/余弦运动规律为

$$\begin{cases} \alpha(t) = 3^\circ \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ \beta(t) = 6^\circ \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \\ h_s(t) = 0.4 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \end{cases} \tag{34}$$

式(34)中: $\alpha$  为下平台绕  $y$  轴运动; $\beta$  为下平台绕  $x$  轴运动; $h_s$  为下平台沿  $z$  轴运动。

考虑所设计机构的实际工作要求,结合实际利用三维造型软件建立上述 3UPU-UP 并联机构的缩比模型,通过软件测量得到本次联合仿真使用的系统参数。

动平台支点坐标为

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = (-0.476; 0.275; 0) \\ \mathbf{B}_2 = (0.476; 0.275; 0) \\ \mathbf{B}_3 = (0; 0.550; 0) \end{cases} \tag{35}$$

定平台支点坐标为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = (-0.195; 0.113; 0) \\ \mathbf{A}_2 = (0.195; 0.113; 0) \\ \mathbf{A}_3 = (0; -0.225; 0) \end{cases} \tag{36}$$

在上述参数下的缩比样机中进行计算,图 3 为可操作性示意图,可以看出,所设计的 3UPU-UP 并联平台在计算过程中可操作性可以看作 0,位置和姿态运动控制的较为灵敏,不会发生失控现象。10 s 为总计算时间的中值,并且在 10 s 时位于差异度的峰值,取 10 s 时 3UPU-UP 并联平台的可操作性椭球,从图 4 可以看出,可操作型椭球与完美球体的差异很小,因此它在这一时刻下可以向任意方向运动时,其运动发生突变的概率会很小。图 5 为在运

动过程中可操作性椭球与完美球体之间差异度的示意图,可以得到 3UPU-UP 并联平台在理想状态运动过程中距离完美球体的差异度呈周期性变化且差异值最大不超过 0.62。

因此,从上述分析中可知,3UPU-UP 并联平台的运动性能较为优异,不易发生失控现象。

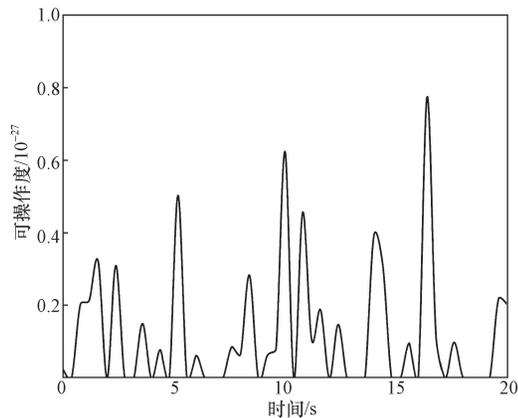


图 3 可操作性示意图  
Fig. 3 Diagram of operability

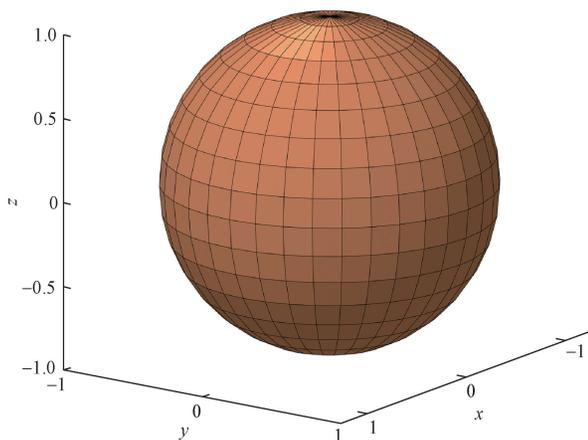


图 4 10 s 时可操作性椭球  
Fig. 4 Manoeuvrability ellipsoid at 10 s

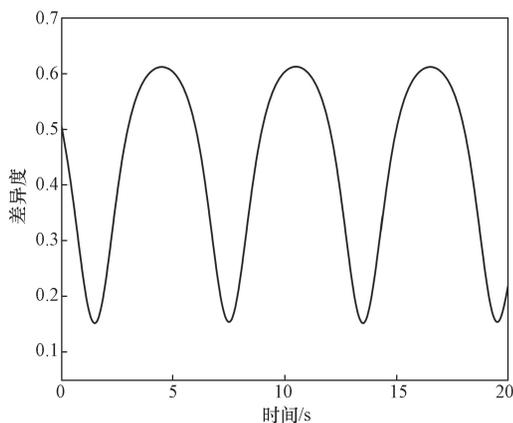


图 5 距离完美球体的差异度  
Fig. 5 Degree of variation from a perfect sphere

### 3 工作空间分析

#### 3.1 理论分析

Stewart 平台的工作空间可定义为以动平台中心即原点  $\{p\}$  可达的三维笛卡尔空间。工作空间受支链长度、万向节转角、支链之间的干涉。因为分析的机构为三支链,明显支链之间没有干涉。对 3UPU-UP 并联平台工作空间几何约束的另外两个限制因素进行分析。

(1) 支链长度的限制。由式(1)可知,UPU 支链的长度  $l_i = |\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i|$ ,支链在机构中存在最短支链  $l_{\min}$  和最长支链  $l_{\max}$ ,即  $l_{\min} \leq l_i \leq l_{\max}$ ,其中 UP 支链长度可通过 UPU 支链长度进行求得。

(2) 万向节转角限制。由图 1 可知,3UPU-UP 并联平台支链通过万向节与动平台和静平台连接。万向节转角的角速度  $\dot{\theta}_{bi} = \arccos \frac{l_i l_0}{|l_i| |l_0|} \leq \theta_{bi\max}$ ,其中,  $l_0$  为初始的支链向量,  $\theta_{bi\max}$  为万向节转角的最大角度。

(3) 平台工作角度限制。平台在工作时有其自身结构的限制,在工作时平台的转动角度  $\theta_d$  限制为  $\theta_{\min} \leq \theta_d \leq \theta_{\max}$ ,其中,  $\theta_{\min}$ 、 $\theta_{\max}$  分别为工作时平台转动角度的最大值和最小值。

对于工作空间分析方法有解析法、图解法和数值法<sup>[14-17]</sup>。对工作空间的分析方法采用其中的蒙特卡洛算法。该算法在运动范围内进行的极限边界搜索,通过取大量的采样点进行计算,并用正运动学求解,即可得到相应的动平台位姿,同构绘制大量位置点即可可视化机器人工作空间。其工作的逻辑为:先给定初始位姿,一般是以取支链最小和转角为 0 时为初始位姿,并分别设定步长;依次进行迭代并判断是否在支链满足的范围条件之内;若满足,再判断是否满足万向节转角的运动范围;若都满足通过运动学正解计算得出动平台位姿,并进行记录。具体搜索流程图如图 6 所示。

#### 3.2 工作空间实例计算与分析

在进行数据数值分析时,采取上述的蒙特卡洛算法,在 MATLAB 中进行编程计算。根据蒙特卡洛算法所得到的位姿参数并且依据正运动学结合支链长度与虎克铰转动角度的限制,最终以图形可视化的形式得出工作空间。根据结构的设计得出,支链长度与虎克铰转动角度的限制条件为

$$\begin{cases} 0.600 \text{ m} \leq l_i \leq 0.900 \text{ m} \\ 0 \leq \theta_{bi} \leq 0.960\pi \\ -0.500\pi \leq \theta_d \leq 0.500\pi \end{cases} \quad (37)$$

为保证 3UPU-UP 并联平台在运动过程中机构的安全,对动平台安全转动角度规定为

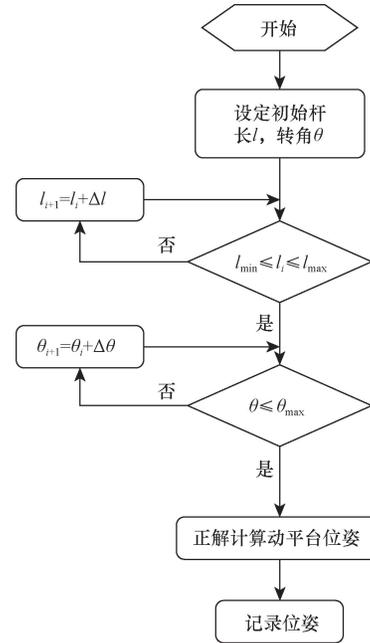


图 6 蒙特卡洛法搜索流程示意图

Fig. 6 Diagram of the Monte Carlo search process

$$\begin{cases} -0.122\pi \leq \alpha \leq 0.122\pi \\ -0.122\pi \leq \beta \leq 0.122\pi \end{cases} \quad (38)$$

以式(35)~式(38)的结构参数为基础,通过 MATLAB 运算得出如图 7、图 8 所示的可视化工作空间示意图。

图 7 为工作空间示意图,从图 7 (b) 中工作空间绕 x 轴对称分布,从图 7 (c) 中工作空间绕 x 轴对称分布,从图 7 (d) 中工作空间绕 z 轴对称分布,因此可以说工作空间总体呈对称分布,这一特性与并联机构的结构特征相符合,并且图中的工作空间边界线过渡总体呈平缓状态,因此可说明 3UPU-UP 并联平台工作性能优异。

对 3UPU-UP 并联平台的可达工作空间分析得出如图 8 所示可达工作空间示意图,从图 8 (b) 中工作空间中心对称分布,从图 8 (c) 中工作空间绕 x 轴对称分布,从图 8 (d) 中工作空间绕 y 轴对称分布,因此可以说工作空间总体绕 z 轴对称分布,3UPU-UP 并联平台可达工作空间,可适用于多种场合。通过对于图 7、图 8 工作空间示意图的分析,可为工程实践中对 3UPU-UP 并联平台的安装及使用提供理论支持。

### 4 结论

针对 3UPU-UP 并联平台在设计时可操作性与工作空间的问题进行分析,得出以下结论。

(1) 首先,通过矢量法与运动学分析计算得出 3UPU-UP 并联平台运动学模型。以运动学模型为基

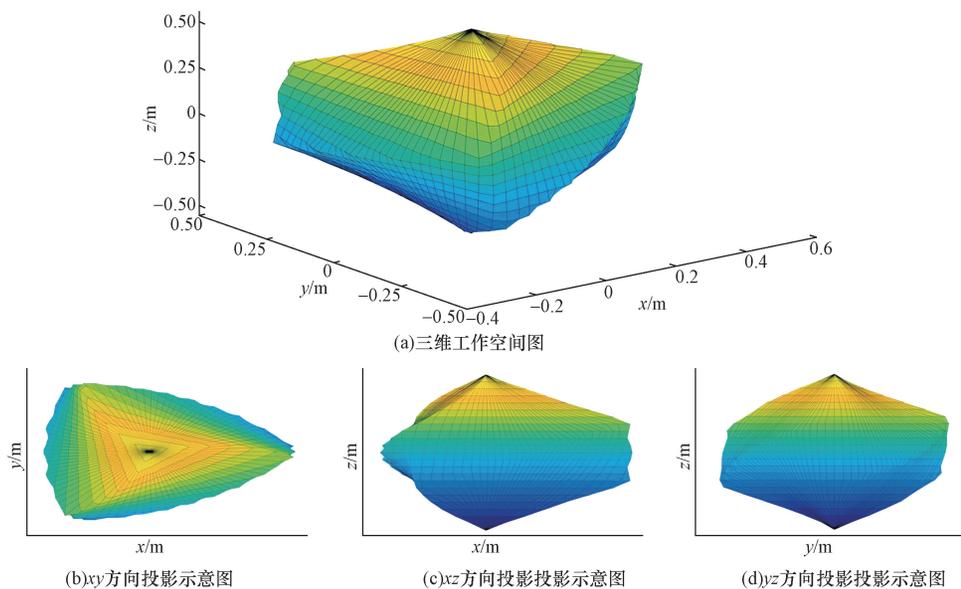


图7 工作空间示意图

Fig. 7 Diagram of the working space

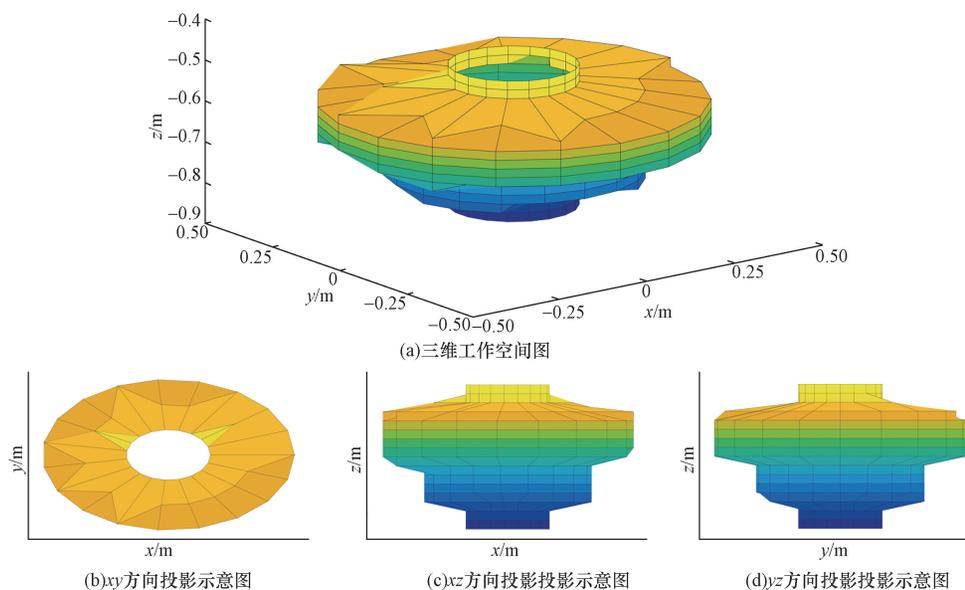


图8 可达工作空间示意图

Fig. 8 Diagram of the reachable workspace

础,首次将串联机械臂可操作度的评价指标与3UPU-UP 并联平台的机构结构特性相结合,对3UPU-UP 并联平台的可操作度进行了计算、分析和可视化处理。结果显示可操作型椭球在运动过程中与完美球体相比的差异呈现周期性变化,且最大差异值不超过 0.62,这表明 3UPU-UP 并联平台具有出色的运动性能。

(2)在运动范围内将蒙特卡洛法与正运动学相结合对并联平台的工作空间进行了计算、分析和可视化处理。能够更加直观、完整表述并联平台的可操作度和工作空间。分析结果显示,该平台的工作

空间呈现对称分布,并且具有优异的性能。它具有较大的可达工作空间范围,适用于多种不同场合。

#### 参 考 文 献

- [1] 邱建超, 李建, 王生海, 等. 一种三自由度海上廊桥试验台的建模与实验[J]. 科学技术与工程, 2022, 22(22): 9840-9847. Qiu Jianchao, Li Jian, Wang Shenghai, et al. Modelling and experimentation of a three-degree-of-freedom offshore gangway[J]. Science Technology and Engineering, 2022, 22(22): 9840-9847.
- [2] Zhao X, Zhao T, Xu X, et al. Kinematic analysis and dimensional synthesis of a three-degrees-of-freedom hybrid-drive parallel mechanism[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers,

- Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2019, 233(8): 2728-2752.
- [3] Hu X, Li F, Tang G. Kinematics analysis of 3UPU-UP coupling parallel platform in the marine environment[J]. IEEE Access, 2020, 8: 158142-158151.
- [4] Niu A, Wang S, Sun Y, et al. Dynamic modeling and analysis of a novel offshore gangway with 3UPU/UP-RRP series-parallel hybrid structure[J]. Ocean Engineering, 2022, 266: 113122.
- [5] Qiu J, Qiu W, Niu A, et al. Modeling and analysis of offshore gangway under dynamic load[J]. Journal of Marine Science and Engineering, 2023, 11(1): 77.
- [6] Tang G, Lei J, Li F, et al. A modified 6-DOF hybrid serial-parallel platform for ship wave compensation[J]. Ocean Engineering, 2023, 280: 114336.
- [7] Russo M, Ceccarelli M. A geometrical formulation for the workspace of parallel manipulators[J]. Robotica, 2022, 40(8): 2581-2591.
- [8] Yin X L, Li B, Zhang X H. Kinematic analysis of a redundant actuated five degrees of freedom parallel mechanism[C]//2018 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). New York: IEEE, 2018: 2031-2037.
- [9] Liu S, Qiu Z C, Zhang X M. Singularity and path-planning with the working mode conversion of a 3-DOF 3-RRR planar parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 107: 166-182.
- [10] Petelin D, Fomin A, Laryushkin P, et al. Design, kinematics and workspace analysis of a novel 4-DOF kinematically redundant planar parallel grasping manipulator[J]. Machines, 2023, 11(3): 319.
- [11] Lee T Y, Shim J K. Forward kinematics of the general 6-6 Stewart platform using algebraic elimination[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(9): 1073-1085.
- [12] Yoon J W, Ryu J, Hwang Y K. Optimum design of 6-DOF parallel manipulator with translational/rotational workspaces for haptic device application[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2010, 24: 1151-1162.
- [13] Li Y, Li C, Qu D, et al. Errors modeling and sensitivity analysis for a novel parallel manipulator[C]//2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. New York: IEEE, 2012: 755-760.
- [14] 张明坤, 郝志伟, 王成军, 等. 5 自由度船舶靠泊装置运动学及工作空间分析[J]. 船舶工程, 2020, 42(10): 61-67, 73. Zhang Mingkun, Zhu Zhiwei, Wang Chengjun, et al. Kinematics and workspace analysis of 5-DOF ship berthing device[J]. Ship Engineering, 2020, 42(10): 61-67, 73.
- [15] 李猛, 侯红娟, 崔国华. 一种双机协同作业机器人的协作工作空间分析[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(31): 12802-12807. Li Meng, Hou Hongjuan, Cui Guohua. Analysis of collaborative workspace two-arm collaborative grinding robot[J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(31): 12802-12807.
- [16] Zhao J S, Chu F, Feng Z J. Symmetrical characteristics of the workspace for spatial parallel mechanisms with symmetric structure[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(4): 427-444.
- [17] Arrouk K A, Bouzgarrou B C, Gogu G. Workspace characterization and kinematic analysis of general spherical parallel manipulators revisited *via* graphical based approaches[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 122: 404-431.