2021 年 第 21 卷 第 12 期
2021, 21(12): 04995-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

ISSN 1671—1815
CN 11—4688/T

引用格式:王继强. 基于 LINGO 的最小支撑树问题的模型与解法[J]. 科学技术与工程, 2021, 21(12): 4995-4998.
Wang Jiqiang. Models and solutions for the minimum spanning tree problem based on LINGO[J]. Science Technology and Engineering, 2021, 21(12): 4995-4998.

基于 LINGO 的最小支撑树问题的模型与解法

王继强
(山东财经大学数学与数量经济学院, 济南 250014)

摘 要 研究了图与网络领域中的一类经典问题——最小支撑树问题,分析其现有算法的不足,通过引入 0-1 变量和辅助变量,根据最小支撑树的本质属性,从两个角度建立了最小支撑树问题的整数规划模型,编写了与模型相对应的 LINGO 程序。实证分析验证了模型的正确性,比较了两种建模模式的优劣。

关键词 最小支撑树; 0-1 变量; 辅助变量; 整数规划; LINGO
中图法分类号 TP301.6; **文献标志码** A

Models and Solutions for the Minimum Spanning Tree Problem Based on LINGO

WANG Ji-qiang
(School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

[**Abstract**] The classical problem in the area of graph and network-the minimum spanning tree problem was studied and the shortcomings of its existing algorithm were analyzed. By introducing 0-1 variables and auxiliary variables and deploying the essential properties of the minimum spanning tree, the integer program model for the minimum spanning tree problem from two angles was formulated, and the LINGO program corresponding to the model was written. The correctness of the model was verified in empirical analysis, and the advantages and disadvantages of the two models were revealed.

[**Keywords**] minimum spanning tree; 0-1 variable; auxiliary variable; integer program; LINGO

网络设计问题是离散最优化和计算机设计领域中的一个重要问题,它要求人们从网络图中找出满足某种特征的一个子图来。比如最短路问题、最大流问题、旅行商问题(TSP)、中国邮路问题及本文要研究的最小支撑树问题等都属于这类问题。顾名思义,最小支撑树问题就是要从赋权连通图中找出一个权最小的支撑树。这一问题在理论上有重要应用,如最短路问题、TSP、匹配问题、Steiner 树问题等问题的解决;它在现实中也有很多应用,如场站建设、城市规划、超大规模集成电路(very large scale integration, VLSI)设计、交通道路布局、通信网络架设等[1-2]。

就算法复杂度而言,最小支撑树问题并不属于 NP-困难问题,即它可以在关于问题输入规模的多项式函数的时间内完成求解。Kruscal 算法、Prim 算法都是求解最小支撑树问题的经典算法,但它们都是仅仅使用了组合最优化思想直接在图上完成操作的,而未能尽可能地利用问题本身的代数特征,建立数学规划模型,借助现代高性能计算软件(如 LINGO、MATLAB、1stOpt 等)完成问题的求解过程[3-4]。显然,在大数据时代,经典算法费时费力,给人以笨拙之感;对于图的规模相对较大的情形,“建模 + 软件”解法更贴近生产生活的实际需求。

1 问题陈述

在图与网络理论中,用点表示对象,边表示对象之间的关系,这样的“点-边”二元结构就是图。如有需要,可给图的边赋予一个数字作为权,是为赋权图。根据边有无方向,图可分为无向图和有向图。本文中所指的图均为赋权无向图,简称赋权图。图 G 中一个点边交错构成的非空有限序列称为 G 的链,其中点不重合的链称为路,始、终点重合的路称为圈。任两点之间都至少有一条路的图称为连通图。点、边都取自图 G 的图称为 G 的子图,其中点与 G 完全相同的子图称为 G 的支撑子图。不含有圈的连通图称为树。图 G 中本身是树的支

收稿日期: 2020-08-16; 修订日期: 2020-10-24
基金项目: 国家自然科学基金(61502151);教育部产学合作协同育人项目(201802047030)
作者简介: 王继强(1976—),男,汉族,山东枣庄人,博士,副教授。研究方向:算法分析与设计、组合最优化。E-mail:sdcdmcm@126.com。

撑子图称为 G 的支撑树。赋权图 G 中一个所有边的权之和最小的支撑树称为 G 的最小支撑树。于是,最小支撑树问题就是要从赋权图中找到一个最小支撑树,其正式表述为:

给定一个赋权图 $G=(V,E,W)$,其中 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 为点集,$E\subseteq V\times V$ 为边集,点 i 和点 j 之间有边 ij,边 ij 的权为 $w_{ij}\in W$。设 T 是 G 的一个支撑树,定义 T 的权为其所有边的权之和。试从图 G 中找出一个最小支撑树。

当边 ij 不存在或 $i=j$ 时,规定其权为"$+\infty$"。在编写程序时,权"$+\infty$"可用一个充分大的正数代替。

2 模型与求解

2.1 图模型与算法

如前所述,最小支撑树问题在图模型上就是要从赋权图中找到一个权最小的支撑树。

作为最小支撑树问题的图算法,Kruscal 算法和 Prim 算法都利用了支撑树的根本特征[5-8]:作为支撑子图,T 须占有图 G 的全部点;作为树,T 须连通且无圈。

Kruscal 算法坚持在无圈的前提下,优先选取权最小的边这一原则,从图 G 的边中逐次选入 $n-1$ 条边,故又称避圈法。

Prim 算法坚持在连通的前提下,优先去除权最大的边这一原则,从图 G 的边中逐次删掉多余的 $|E|-n+1$ 条边,故又称破圈法。

Kruscal 算法和 Prim 算法一立一破,殊途同归,完美地诠释了"有破有立,破立结合"的辩证思想。

2.2 数学规划模型 I 与求解

为建立最小支撑树问题的数学规划模型,特引入 0-1 决策变量:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{边 } ij \text{ 在最小支撑树上}\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\ i,\ j=1,2,\cdots,n。$$

利用 0-1 变量,可以写出目标函数:

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},\text{即使最小支撑树的边权之和最小。}$$

同样,可以利用 0-1 变量写出约束条件如下:

首先,最小支撑树中须含有 $n-1$ 条边,即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=n-1。$$

其次,最小支撑树中须不含有圈(不论是简单圈,还是复合圈),为此须使图 G 中每一个圈都至少去掉一条边,即

$$\sum_{ij\in C}x_{ij}\leqslant e(C)-1,\ \forall\ \text{圈 } C。$$

式中:$e(C)$ 为圈 C 的边数。

综上,建立最小支撑树问题的数学规划模型 I 为

$$\begin{aligned}&\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},\\ &\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=n-1,\\ &\qquad \sum_{ij\in C}x_{ij}\leqslant e(C)-1,\ \forall\ \text{圈 } C;\\ &\qquad x_{ij}=0,1;\ i,j=1,2,\cdots,n。\end{aligned}$$

易见,模型 I 是一个 0-1 整数规划问题,其求解可借助 LINGO 软件完成。

2.3 数学规划模型 II 与求解

同数学规划模型 I,引入 0-1 变量 $x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$。于是,有

目标函数:

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},\text{即使边权之和最小。}$$

约束条件:

首先,为保证最小支撑树的连通性,设点 1 是始点,则最小支撑树中须至少有 1 条边离开点 1,即

$$\sum_{j=2}^{n}x_{1j}\geqslant 1。$$

同时,除始点 1 外,最小支撑树中须有且仅有 1 条边进入其他各点,即

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}x_{ij}=1,\ j=2,3,\cdots,n。$$

其次,为保证最小支撑树的无圈性,受旅行商问题的建模思想[9]启发,对于图 G 的每一个点 j,引入一个辅助变量 $u_j\geqslant 0$,对于每一条边 ij,追加约束条件:

$$u_i-u_j+nx_{ij}\leqslant n-1。$$

例如,在图 1 中,12341 显然是一个圈。而且,该圈显然满足上述前两个约束条件,但不满足第 3 个约束条件:

$$u_1-u_2+4x_{12}\leqslant 3,$$
$$u_2-u_3+4x_{23}\leqslant 3,$$
$$u_3-u_4+4x_{34}\leqslant 3,$$

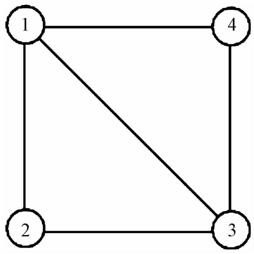

图 1 反例

Fig. 1 Counterexample

$u_4 - u_1 + 4x_{41} \leqslant 3$。

这是因为将上述 4 式左右两边分别相加,有

$4(x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{41}) \leqslant 12$。

又由图 1 知,$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1$,故 $16 \leqslant 12$,矛盾!

综上,建立最小支撑树问题的数学规划模型 II:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s. t.}\quad \sum_{j=2}^{n} x_{1j} \geqslant 1,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i=j}}^{n} x_{ij} = 1, j = 2,\cdots,n,$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leqslant n - 1,$$

$$i,j = 1,\cdots,n; i \neq j,$$

$$x_{ij} = 0,1, i,j = 1,\cdots,n,$$

$$u_j \geqslant 0, j = 1,\cdots,n。$$

易见,模型 II 是一个混合整数规划问题,其求解可借助 LINGO 软件完成。

3 实证——光纤网络铺设

图 2 所示为某地 8 个建筑物的位置、相互之间的道路及其长度。

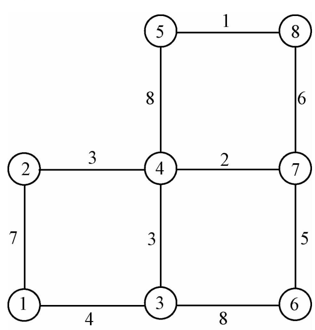

图 2　建筑物布局

Fig. 2　The layout of buildings

通信公司拟为该地铺设高速光纤网络,要求覆盖所有建筑物,且造价最低。试为该公司设计一个最优的光纤网络铺设方案[10]。

经分析知,最优的光纤网络铺设方案对应着图 2 中网络图的一个最小支撑树。

3.1 经典算法

使用 Kruscal 算法,依次选取边 58、47、24、34、13、67、78(共 7 条),得最小支撑树即光纤铺设方案如图 3 所示。

使用 Prim 算法,依次删掉边 45、36、12(共 3 条),得最小支撑树即光纤铺设方案亦如图 3 所示。

3.2 数学规划模型 I

注意到图 2 中有 3 个简单圈和 3 个复合圈,根

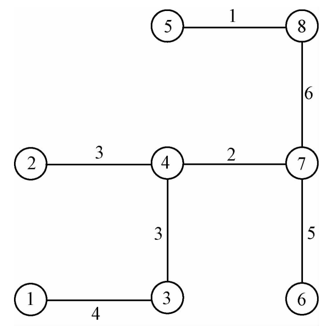

图 3　光纤铺设方案

Fig. 3　The laying plan of optical fiber network

据模型 I,采用简约模式编写 LINGO 程序代码如下:

```
min =7 * x12 +4 * x13 +3 * x24 +3 * x34 +8 * x36 +8 * x45 +
2 * x47 + x58 +5 * x67 +6 * x78;
x12 + x13 + x24 + x34 + x36 + x45 + x47 + x58 + x67 + x78 =7;
x12 + x13 + x24 + x34 < =3;
x34 + x36 + x47 + x67 < =3;
x45 + x47 + x58 + x78 < =3;
x12 + x13 + x24 + x36 + x47 + x67 < =5;
x34 + x36 + x45 + x58 + x67 + x78 < =5;
x12 + x13 + x24 + x36 + x45 + x58 + x67 + x78 < =7;
@ bin(x12);@ bin(x13);@ bin(x24);@ bin(x34);@ bin(x36);
@ bin(x45);@ bin(x47);@ bin(x58);@ bin(x67);@ bin(x78);
```

在 LINGO12. 0 上运行,返回主要结果:

```
Global optimal solution found.
Objective value:          24. 00000
Objective bound:          24. 00000
Infeasibilities:          0. 000000
Extended solver steps:    0
Total solver iterations:  0
Variable    Value       Reduced Cost
X12         0. 000000   7. 000000
X13         1. 000000   4. 000000
X24         1. 000000   3. 000000
X34         1. 000000   3. 000000
X36         0. 000000   8. 000000
X45         0. 000000   8. 000000
X47         1. 000000   2. 000000
X58         1. 000000   1. 000000
X67         1. 000000   5. 000000
X78         1. 000000   6. 000000
```

据此知,最优解为 $x_{13} = x_{24} = x_{34} = x_{47} = x_{58} = x_{67} = x_{78} = 1$,其余 $x_{ij} = 0$。从而,最优光纤网络铺设方案如图 3 所示。

3.3 数学规划模型 II

根据模型 II,采用集合模式编写 LINGO 程序代码如下:

```
model:
sets:
vertex/1. .8/:u;
link(vertex,vertex):c,x;
endsets
```

```
data:
c=0    7  4  100  100  100  100  100
7  0  100  3  100  100  100  100
4  100  0  3  100  8  100  100
100  3  3  0  8  100  2  100
100  100  100  8  0  100  100  1
100  100  8  100  100  0  5  100
100  100  100  2  100  5  0  6
100  100  100  100  1  100  6  0;
enddata
min=@sum(link:c*x);
@sum(vertex(j)|j#gt#1:x(1,j))>=1;
@for(vertex(j)|j#gt#1:@sum(vertex(i)|i#ne#j:x(i,j))=1;);
n=@size(vertex);
@for(link(i,j)|i#ne#j:u(i)-u(j)+n*x(i,j)<=n-1);
@for(link:@bin(x));
```

在 LINGO12.0 上运行,返回主要结果:

```
Global optimal solution found.
Objective value:        24.00000
Objective bound:        24.00000
Infeasibilities:        0.000000
Extended solver steps:  2
Total solver iterations:  107
Variable      Value      Reduced Cost
N             8.000000   0.000000
U(1)          0.000000   0.000000
U(2)          3.000000   0.000000
U(3)          1.000000   0.000000
U(4)          2.000000   0.000000
U(5)          5.000000   0.000000
U(6)          4.000000   0.000000
U(7)          3.000000   0.000000
U(8)          4.000000   0.000000
X(1,3)        1.000000   4.000000
X(3,4)        1.000000   3.000000
X(4,2)        1.000000   3.000000
X(4,7)        1.000000   2.000000
X(7,6)        1.000000   5.000000
X(7,8)        1.000000   6.000000
X(8,5)        1.000000   1.000000
```

据此知,最优解为 $x_{13}=x_{24}=x_{34}=x_{47}=x_{58}=x_{67}=x_{78}=1$,其余 $x_{ij}=0$。从而,最优光纤网络铺设方案亦如图3所示。

显然,两个经典算法、模型 I、模型 II 得到的结果完全一致,即最优光纤网络铺设方案相同,当然造价也相同(与光纤总铺设长度24成正比)。

考虑到模型 I 需要预先找出图 G 的所有圈,再对其逐一写出无圈性的约束条件,不便于编写集合模式的 LINGO 程序,略显烦琐;相对而言,模型 II 适于集合模式编程,更为便捷。

4 结束语

分析了最小支撑树问题经典算法的局限性之后,从最小支撑树的本质特征出发,建立了两种模式的数学规划模型,基于 LINGO 软件的应用实例表明模型是科学有效的。

利用“数学规划模型+高效计算软件”模式解决最小支撑树问题的思想和方法可望为现实生产生活中涉及大规模数据计算的许多工程设计问题的解决提供思想借鉴和方法参考。

参考文献

[1] 魏国华, 傅家良, 周仲良. 实用运筹学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1987: 174-179.
Wei Guohua, Fu Jialiang, Zhou Zhongliang. Practical operations research[M]. Shanghai: Fudan University Press, 1987: 174-179.
[2] 王树禾. 图论[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 28-37.
Wang Shuhe. Graph theory[M]. Beijing: Science Press, 2004: 28-37.
[3] 袁新生, 邵大宏, 郁时炼. LINGO 和 EXCEL 在数学建模中的应用[M]北京: 科学出版社, 2007: 77-81.
Yuan Xinsheng, Shao Dahong, Yu Shilian. The applications of LINGO and EXCEL in mathematical modeling[M]. Beijing: Science Press, 2007: 77-81.
[4] 谢金星, 薛 毅. 优化建模与 LINDO/LINGO 软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 297-301.
Xie Jinxing, Xue Yi. Optimization modeling and LINDO/LINGO software[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 297-301.
[5] 姚恩瑜, 何 勇, 陈仕平. 数学规划与组合优化[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2001: 121-124.
Yao Enyu, Heyong, Chen Shiping. Mathematical programming and combinatorial optimization [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2001: 121-124.
[6] Taha H A. Operations research: an introduction (8th edition) [M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2007: 239-243.
[7] Chartrand G, Zhang P. Introduction to graph theory [M]. New York: MacGraw-Hill Companies, Inc., 2005: 94-99.
[8] Bollobás B. Modern graph theory [M]. New York: Springer, 1998: 8-14.
[9] 薛 毅, 耿美英. 运筹学与实验[M]. 北京: 电子工业出版社, 2008: 394-396.
Xue Yi, Geng Meiying. Operations research and experiment[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2008: 394-396.
[10] 徐永仁. 运筹学试题精选与答题技巧[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001: 94-96.
Xu Yongren. Selection of operational research questions and solving skills [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001: 94-96.