第 11 卷　第 33 期　2011 年 11 月
1671—1815(2011)33-8282-04

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 11　No. 33　Nov. 2011

热传导方程初值问题的解在概率统计中的应用

刘转转

（中北大学理学院，太原 030051）

摘　要　在概率论中，求解形如 $E[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma^2}}dx$ 的积分是很重要的。但即使 $\varphi(x)$ 是初等函数如 x^n，e^{mx}，$\sin mx$ 等，用常规的分部积分法也不易处理。而 1 维热传导方程初值问题有形如前面的积分解和含有微分算子的级数解，由解的唯一性将把这类期望的积分运算转化为含有微分的级数运算。通过举例说明了该方法在求解数字特征、特征函数等方面的简便实用性，并以公式形式给出了 x^n，e^{mx}，$\sin mx$ 等解析函数的期望。最后作为补充，给出了 n 维类似的结论。

关键词　热传导方程　初值问题　分部积分　微分算子　数学期望　数字特征　特征函数

中图法分类号　O211.9；　文献标志码码　A

在概率论中，求解连续型随机变量 $\varphi(X)$ 的数学期望 $E[\varphi(X)]$ 是很重要的，本文将借助热传导方程初值问题解的特点来求解 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 所对应的期望 $E[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma^2}}dx$。

1　理论背景

已知一维齐次热传导方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (x \in R, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (x \in R) \end{cases} \tag{1}$$

定理 1　当 $\varphi(x) \in C(R)$ 且有界时，问题(1)存在有界古典解[1]

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)2}{4a^2t}}d\xi \tag{2}$$

且当 $\varphi(x) \in C^\infty(R)$ 时，问题(1)又存在级数解[2]

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a^2t)^k}{k!}\varphi^{(2k)}(x) \tag{3}$$

注意到式(2)中的 $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)2}{4a^2t}}$ 可以看作正态分布 $N(x,2a^2t)$ 的密度函数，所以结合定理 1 有以下命题：

命题 1　若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\varphi(x) \in C^\infty(R)$，则

$$E[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma^2}}dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}{}^{(2k)}(x)\Big|_{x=\mu} \tag{4}$$

2　应用

例 1　设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 X 的期望，方差，4 阶原点矩，3 阶中心矩，4 阶中心矩，偏度系数 γ_1，峰度系数 γ_2。

解：
$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma^2}}dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}x^{(2k)}\Big|_{x=\mu} = \mu;$$

$$D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)2}{2\sigma^2}}dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}[(x-\mu)^2]^{(2k)}\Big|_{x=\mu} = \frac{\sigma^2}{2}\times 2 = \sigma^2;$$

2011 年 9 月 9 日收到
作者简介：刘转转，女，中北大学理学院数学系助教，硕士。研究方向：基础数学。E-mail：liuzz428@163.com。

$$\mathrm{E}(X^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}(x^4)^{(2k)}\bigg|_{x=\mu} = \mu^4 + \frac{\sigma^2}{2}\times 12\mu^2 + \frac{\sigma^4}{4\times 2}\times 24 = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4;$$

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^3] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^3\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}[(x-\mu)^3]^{(2k)}\bigg|_{x=\mu} = \frac{\sigma^2}{2}\times 6(x-\mu) = 0;$$

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^4\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}[(x-\mu)^4]^{(2k)}\bigg|_{x=\mu} = \frac{\sigma^4}{4\times 2}\times 24 = 3\sigma^4;$$

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{DX}}\right)^3\right] = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = 0;$$

$$\gamma_2 = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{DX}}\right)^4\right] - 3 = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0。$$

利用常规的分部积分法积分前要进行变量代换,而且还要用到重要的尤拉-普阿桑积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,相对于此利用式(4)只需求微分,运算量大减。而且要指出的是对于积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$,在文献[3]中是从二重积分 $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 入手,结合夹逼准则得到的积分值 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,而事实上如果利用(4)更为简单,如下:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{2}x} \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{E}(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}。$$

例 2　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{mX})$ 和 X 的特征函数 $p(t)=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{itX})$,$t\in R$。

解:
$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{mX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{mx}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^{2k}\mathrm{e}^{mx}}{\mathrm{d}x^{2k}}\bigg|_{x=\mu} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}m^{2k}\mathrm{e}^{mx}\bigg|_{x=\mu} = \mathrm{e}^{m\mu}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2 m^2}{2}} \tag{5}$$

取 $m=it$,代入式(5)便得特征函数 $p(t)=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{itX})=\mathrm{e}^{it\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$。

利用常规的方法求特征函数时会遇到复变函数中的围道积分[4],这里由于指数函数导数的规律性很容易得到结果,式(5)可以作为公式直接用,而且由式(5)可得下面的结论。

例 3　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,证明

$\mathrm{E}(\sin mX)=\sin m\mu\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2m^2}{2}}$, $\mathrm{E}(\cos mX)=\cos m\mu\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2m^2}{2}}$。

证明:一方面由式(5)有:

$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{imX})=\mathrm{e}^{im\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2m^2}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2m^2}{2}}\cos m\mu+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2m^2}{2}}\sin m\mu$;

另一方面由期望的线性性有:

$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{imX})=\mathrm{E}(\cos mX)+\mathrm{i}\mathrm{E}(\sin mX)$。

则由复数相等的充要条件得:

$$\mathrm{E}(\sin mX) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin mx\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \sin m\mu\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2m^2}{2}} \tag{6}$$

$$\mathrm{E}(\cos mX) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos mx\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \cos m\mu\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2m^2}{2}} \tag{7}$$

例 1 至例 3 给出了 $\varphi(X)$ 为 X^n, e^{mX}, $\sin mX$, $\cos mX$ 所对应的数学期望,式(5)、式(6)、式(7)可当公式直接用,再由期望的线性性和欧拉公式,也可很快地算出形如 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{nX}\sin mX)$, $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{nX}\cos mX)$, $\mathrm{E}(\sin nX\cos mX)$ 等的积分。这些无非就是形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{nx}\sin mx\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{nx}\cos mx\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin nx\cos mx\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$。

等这样的积分,利用本文的方法运算量大大减少。

对于形如 $\mathrm{E}(X^n\sin mX)$，$\mathrm{E}(X^n\cos mX)$ 的计算，利用欧拉公式和期望的线性性最终转化为 $E(X^n e^{mX})$ 的计算，见例 4。

例 4 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $\mathrm{E}(X^n e^{mX})$。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^n\mathrm{e}^{mX}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{mx}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 m)]^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^4m^2+2\sigma^2\mu m}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \\ &\mathrm{e}^{\frac{\sigma^4m^2+2\sigma^2\mu m}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 m)]^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \\ &\mathrm{e}^{\frac{\sigma^4m^2+2\sigma^2\mu m}{2\sigma^2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}(x^n)^{(2k)}\Big|_{x=\mu+\sigma^2 m}。\end{aligned}$$

当随机变量 X 不服从正态分布，但所求积分形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{b^2}}\mathrm{d}x$，$\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{b^2}}\mathrm{d}x$ 等同样可以采用式(4)来计算，见例 5。

例 5 分子运动速度 X 服从马克斯威尔分布，即 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}, & x>0; \\ 0, & x\leqslant 0。\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$，求分子运动的平均动能(质量为 m)。

解：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[\frac{1}{2}mX^2\right] = \\ &\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}mx^2\frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x = \\ &\frac{m}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x = \frac{m}{\alpha^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x = \\ &\frac{m}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2k}}{4^k k!}(x^4)^{(2k)}\Big|_{x=0} = \frac{m}{\alpha^2}\frac{\alpha^4}{4^2\cdot 2}\cdot 4! = \frac{3}{4}m\alpha^2。\end{aligned}$$

3 注记

作为对 1 维的补充，n 维也有类似结论。

已知 n 维齐次热传导方程初值问题：

$$\begin{cases}u_t = a^2\Delta u & (x\in R^n, t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x) & (x\in R^n)\end{cases} \tag{8}$$

定理 2[2] 当 $\varphi(x)\in C(R^n)$ 且有界时，问题式(8)存在有界古典解

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n\int_{R^n}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi \tag{9}$$

式(9)中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$；

且当 $\varphi(x)\in C^\infty(R^n)$ 时，问题式(8)又存在级数解

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a^2t)^k}{k!}\Delta^k\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a^2t)^k}{k!}\Delta^k\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{10}$$

设随机变量 $X_i\sim N(x_i,2a^2t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 相互独立，则式(9)中的 $\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}$ 其实可看作 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合密度函数，所以结合定理 2 有以下命题：

命题 2 若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$ $(i=1,\cdots,n)$ 相互独立，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^\infty(R^n)$，则

$$\mathrm{E}[\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\int_{R^n}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{|x-\mu|^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2k}}{2^k k!}\Delta^k\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big|_{x=\mu} \tag{11}$$

因与 1 维类似，故由命题 2 来求期望，此处不再举例，而且当 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)\cdots\varphi_n(X_n)$ 时，由 X_i $(i=1,\cdots,n)$ 相互独立得 $\varphi_i(X_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 相互独立，则有 $E[\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=\prod_{i=1}^n\mathrm{E}[\varphi_i(X_i)]$，所以当 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)\cdots\varphi_n(X_n)$ 时直接转化成 1 维更易计算，不过利用此马上可得到以下命题 3。

命题 3 若初始条件 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_n(x_n)$，则式(8)的解 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)=\prod_{i=1}^n u_i(x_i,t)$，其中 $u_i(x_i,t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 为一维齐次热传导方程初值问题

$$\begin{cases}u_t = a^2u_{x_ix_i} & (x_i\in R, t>0) \\ u(x_i,0)=\varphi_i(x_i) & (x_i\in R)\end{cases} \quad (i=1,\cdots,n)$$

的解。

4 结论

本文利用热传导方程初值问题解的两种形式的一致性,将一类期望的积分运算转化成了含有微分算子的级数运算。通过举例给出了初等的幂函数、指数函数、三角函数以及其乘积所对应的积分运算的公式解,可以看出用此法计算量大减,体现了一定的优越性,最后作为对 1 维的补充,给出了 n 维的类似结论。

参 考 文 献

1 姜礼尚,陈亚浙,刘西垣,等. 数学物理方程讲义. 北京:高等教育出版社,1986

2 王明新. 数学物理方程. 北京:清华大学出版社,2005

3 同济大学数学系. 高等数学(下册). 北京:高等教育出版社,2007

4 魏宗舒. 概率论与数理统计教程. 北京:高等教育出版社,1983

The Application of Solution to Cauchy Problem of the Heat Equation in Probability and Statistics

LIU Zhuan-zhuan

(College of Science, North University of China, Taiyuan 030051, P. R. China)

[**Abstract**] In probability theory, the integral such as $\mathrm{E}[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ is very important, but it is not easy to solve it by using integration by parts, though $\varphi(x)$ is the elementary function such as x^n, e^{mx}, $\sin mx$, *etc*. The solution of the Cauchy problem of one-dimension heat equation has two forms: the integral as $\mathrm{E}[\varphi(X)]$ which was mentioned and the progression with differential operator. Because of the unique of the solution, integral oper-ation can be changed into differential operation. The formulas will be easily given in the form of examples about n-umerical characteristic and characteristic function, *etc*, when $\varphi(x)$ is the elementary function such as x^n, e^{mx}, $\sin mx$, and the product of them. Finally, the theory of n-dimension heat equation will be given.

[**Key words**] heat equation Cauchy problem integration by parts differential operator mathematical expectation numerical characteristic characteristic function