第 11 卷　第 33 期　2011 年 11 月
1671—1815(2011)33-8286-03

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 11　No. 33　Nov. 2011
© 2011　Sci. Tech. Engrg.

求解一类半无限多目标规划的神经网络算法

杨红梅

(昌吉学院数学系,昌吉 831100)

摘　要　考虑了一类半无限多目标规划问题。根据极大熵方法,先将其转化为半无限单目标可微凸优化问题。再由原问题和对偶问题之间的关系,提出了求解它的能量函数和神经网络模型,并证明该神经网络模型的解是一致渐近稳定的。该模型结构简单,规模小。

关键词　半无限多目标规划　极大熵方法　能量函数　神经网络

中图法分类号　O221.2;　**文献标志码**　A

自然生活和工程技术中的许多问题常常可以归结为半无限多目标规划问题。因此对于半无限多目标问题解法的研究具有重要的意义。近些年,许多学者将神经网络引入到求解优化问题中来,已取得很好的效果[1—3]。神经网络具有自组织、自适应、自学习的特点,它能够大规模并行处理、分布式存储和高度的容错能力。本文就一类半无限多目标规划问题,提出求解它的神经网络模型,并证明该神经网络模型的解是一致渐近稳定的。该模型结构简单,规模小。

1　神经网络模型的提出

考虑下述半无限多目标规划问题

$$\min F(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \geqslant 0, i \in I \tag{1}$$

式(1)中 $F(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))^{\mathrm{T}}$,$f_j(x)$ $(j=1,2,3,\ldots,m)$是凸函数,$-g_i(x)(i\in I)$是凸函数。$x\in R^n$,$m\geqslant 2$,I 为无限集。

对于问题(1),若考虑在最不利的情况下找出一个最有利的方案,则可以极大值评价函数[4],即

$$\varphi(F(x)) = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\{f_j(x)\}。$$

于是问题(1)的求解就相应地转化为求解下面的问题,即

$$\min \varphi(F(x))$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \geqslant 0, i \in I \tag{2}$$

问题(1)和问题(2)的解有如下关系:

引理 1[4]　问题(2)的最优解为问题(1)的弱有效解。

显然,问题(2)是不可微的有约束优化问题,下面采用极大熵方法[5],则有

$$\min \varphi_p(F(x))$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \geqslant 0, i \in I \tag{3}$$

式(3)中 $\varphi_p(F(x)) = \dfrac{1}{p}\ln(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{p\cdot f_j(x)})$,并且有

定理 1[6]　$\varphi_p(F(x))$一致收敛于 $\varphi(F(x))$,当 $p\to +\infty$ 时。

因此,当 p 充分大时,问题(3)的解为问题(2)的近似解,即为问题(1)的近似弱有效解。且问题(3)是半无限单目标可微凸优化问题,文献[7]中证明:对于凸优化问题,可用下述问题逼近问题(3),即问题(3)的最优解可以通过求解下述问题的最优解来获得,即:

$$\min \varphi_p(F(x))$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \geqslant 0; i=1,2,\ldots,l, x\in R^n \tag{4}$$

为求解问题(4),可假设式(4)有解且为强相容的,即 $\exists x^0 \in R^n$,s.t.

$$g_i(x^0) > 0; i=1,2,\ldots,l。$$

2011 年 9 月 8 日收到 新疆昌吉学院科研基金(2010YJYB008)资助
作者简介:杨红梅,女,新疆人,讲师,硕士,研究方向:神经网络,最优化理论及其算法。E-mail:20813524@qq.com。

定理 2　设 $g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_l(x))\in R^l$;$g(x)\in C^1$,则

$$g(x)\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}g(x)^{\mathrm{T}}[g(x)-|g(x)|]=0。$$

其中

$|g(x)|=(|g_1(x)|,|g_2(x)|,...,|g_n(x)|)^{\mathrm{T}}$。

证明:显然成立。

问题(4)的对偶问题为

$$\max_{x,\lambda} L(x,\lambda)=\varphi_p(F(x))-\lambda^{\mathrm{T}}g(x);$$

$$\text{s.t. } \nabla_x L(x,\lambda)=\nabla\varphi_p(F(x))-\nabla g(x)^{\mathrm{T}}\lambda=0 \tag{5}$$

$$\lambda\geqslant 0。$$

式(5)中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)^{\mathrm{T}}$,$g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_l(x))^{\mathrm{T}}$,$\nabla g(x)^{\mathrm{T}}=(\nabla g_1(x),\nabla g_2(x),\cdots,\nabla g_l(x))^{\mathrm{T}}$,

$$\nabla g(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_l(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_l(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_l(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{l\times n}。$$

再根据非线性凸规划理论,易得如下结论。

定理 3　设 x^* 是式(4)的最优解,则存在 $\lambda^*\in R^l$,使得 $(x^{*\mathrm{T}},\lambda^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是式(5)的最优解。

定理 4　x^* 和 $(x^{*\mathrm{T}},\lambda^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 分别是问题(4)和问题(5)的最优解当且仅当

$$\begin{cases}\lambda^{*T}g(x^*)=0\\ \nabla_x L(x^*,\lambda^*)=0\\ g(x^*)\geqslant 0\\ \lambda^*\geqslant 0\end{cases}$$

成立。

证明:易知问题(4)的 Lagrange 函数为

$$L(x,\lambda)=\varphi_p(F(x))-\lambda^{\mathrm{T}}g(x)。$$

它定义在 $C=R^n\times R^l$ 上。由于问题(4)是凸的且满足强相容条件,则有 x^* 是问题(4)的最优解,当且仅当存在 $\lambda^*\in R^l$,使得 (x^*,λ^*) 是 $L(x,\lambda)$ 在 C 上的鞍点,即

$$L(x^*,\lambda)\leqslant L(x^*,\lambda^*)\leqslant L(x,\lambda^*),\ \forall(x,\lambda)\in C。$$

由上式左边,得

$$(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}g(x^*)\geqslant 0,\ \forall\lambda\in R^l。$$

由 $\lambda\in R^l$ 的任意性知

$$\lambda^*\geqslant 0,\mathrm{g}(\mathrm{x}^*)\geqslant 0,\lambda^{*\mathrm{T}}\mathrm{g}(\mathrm{x}^*)=0。$$

再由式(5)得

$$\nabla_x L(x^*,\lambda^*)=0。$$

于是得到证明。

那么求解问题(4)的能量函数可定义如下:

$$E(z)=E(x,\lambda)=\frac{1}{2}[\lambda^{\mathrm{T}}g(x)]^2+\frac{1}{2}\|\nabla_x L(x,\lambda)\|^2+\frac{1}{2}g(x)^{\mathrm{T}}[g(x)-|g(x)|]+\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}[\lambda-|\lambda|] \tag{6}$$

式(6)中 $z=(x^{\mathrm{T}},\lambda^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in R^{n+l}$,且有

定理 5　$z^*=(x^{*\mathrm{T}},\lambda^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是 $E(z)$ 的零点,当且仅当 x^* 与 $(x^{*\mathrm{T}},\lambda^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 分别是式(4)和式(5)的最优解。

证明:“必要性” 若 x^* 与 $(x^{*\mathrm{T}},\lambda^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 分别是式(4)和式(5)的最优解,根据定理 2 和定理 4,则有

$$\lambda^{*\mathrm{T}}g(x^*)=0,\nabla_x L(x^*,\lambda^*)=0,\frac{1}{2}g(x)^{\mathrm{T}}[g(x)-|g(x)|]=0,\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}[\lambda-|\lambda|]=0。$$

代入式(6),就有 $E(z)=0$,即 z^* 是 $E(z)$ 的零点。

“充分性”显然成立。

因此求解问题(4)的神经网络就可以定义为:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\nabla E(z) \tag{7}$$

即

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\nabla_x E(z)=-\lambda^{\mathrm{T}}g(x)\cdot\nabla g(x)^{\mathrm{T}}\lambda-\nabla_x\times L(x,\lambda)\nabla_{xx}L(x,\lambda)-\nabla g(x)^{\mathrm{T}}[g(x)-|g(x)|];\\ \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=-\nabla_\lambda E(z)=-\lambda^{\mathrm{T}}g(x)g(x)+\nabla g(x)\nabla_x\times L(x,\lambda)-(\lambda-|\lambda|)。\end{cases}$$

显然微分方程组(7)的初值问题有惟一解。

2 稳定性分析

定理 6 设最优解集为 $\Omega = \{z \in R^{n+l} \mid x$ 和$(x^{\mathrm{T}}, \lambda^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 分别是式(4)和式(5)的最优解$\}$,网络式(7)的平衡点集为 $\theta = \{z \in R^{n+l} \mid \nabla E(z) = 0\}$,则 $\Omega \subseteq \theta$,即式(4)和式(5)的每一最优解必为网络式(7)的平衡点。

证明:若 $z = (x^{\mathrm{T}}, \lambda^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \Omega$,则由定理3 和定理4 可得 $z \in \theta$,从而有 $\Omega \subseteq \theta$。

定理 7 设问题(4)有最优解,且神经网络式(7)有惟一平衡点,则 z^* 是一致渐近稳定的。

证明:设 $z = z(t, x^0, \lambda^0)$ 是网络式(7)的以(x^0, λ^0)为初始点的积分曲线。

x^* 为问题(4)的最优解,那么在 x^* 的一个闭邻域内,显然有 $E(z)$ 为正定函数。又由于

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(z(t, x^0, \lambda^0)) = -\nabla E(z) < 0。$$

显然沿轨线 $z = z(t, x^0, \lambda^0)$ 的$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$是负定的。

因此,根据 Lyapunov 稳定性定理及定理 6 知,z^* 是一致渐近稳定的。

参 考 文 献

1 Bouzerdorm A, Pattison T R. Neural network for quadratic optimization with bound constraints. IEEE Trans on Neural Networks, 1993;4(2):293—304

2 Xia Youshen. Neural networks for solving extended linear programming problem. IEEE Trans on Neural Networks, 1997; 8(3): 803—806

3 Xia Youshen. A new neural network for solving linear programming and quadratic programming problems. IEEE Trans on Neural Networks, 1996;7(6): 1544—1547

4 胡硫达. 实用多目标最优化. 上海:上海科学技术出版社,1990

5 唐焕文,张立卫,王雪华. 一类约束不可微优化问题的极大熵方法. 计算数学,1993;15(3):268—275

6 王雪华,秦学志. 多目标规划的极大熵方法. 计算数学,1996;(3):305—308

7 Karney D F. A Pathological semi-infinite convex programs and their finite subprograms. Math Prog,1963;27:75—82

A Neural Network for Solving a Class of Semi-infinite Multiple Objective Programming

YANG Hong-mei

(Department of Mathematics , College of Changji, Changji 831100, P. R. China)

[**Abstract**] Considering a class of semi-infinite multiple objective programming problem. it bases on the maximum entropy method. It translates into semi-infinite differentiable convex optimization problem. Then according to the relationship between original problem and dual problem, energy function and neural network model are proposed to solve it, and proved that the solution of neural network model is uniformly asymptotically stable. The model is simple and small.

[**Key words**] semi-infinite multiple objective programming maximal entropy method energy function neural network