第 11 卷　第 33 期　2011 年 11 月
1671—1815(2011)33-8107-04

科学技术与工程
Science Technology and Engineering

Vol. 11　No. 33　Nov. 2011
ⓒ 2011　Sci. Tech. Engrg.

论　文

数学

一类脉冲积分微分系统的稳定性

郑海滨　傅希林*
（山东师范大学，济南 250014）

摘　要　考虑脉冲积分微分系统关于两个测度的稳定性，利用广义二阶导数方法结合 Razumikin 技巧，得到了两个测度稳定性的几个判定结果。

关键词　脉冲积分微分系统　广义二阶导数方法　Razumikin 技巧　稳定性　两个测度
中图法分类号　O175.13；　**文献标志码**　A

脉冲积分微分系统是一类重要的非线性脉冲微分系统，在物理、生物等领域有着广泛的应用背景。近年来引起广泛的兴趣和关注[1]。通常人们利用 Lyapunov 函数的一阶导数讨论脉冲积分微分系统的各种性质，而且总是独立的对系统的离散及连续部分设置条件。本文借助广义二阶导数方法[2,3]，并结合 Razumikin 技巧来讨论脉冲积分微分系统的稳定性。目前，关于这方面的结果并不多见。

我们考虑如下脉冲积分微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x,Tx), t\neq t_k \\ \Delta x(t) = I_k(x(t)), t = t_k, k = 1,2\cdots \\ x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中

(i) $f:R_+\times R^n\times R^n\to R^n, f\in C[(t_k,t_{k+1})\times R^n\times R^n,R^n]$。

(ii) $Tx = \int_{t_0}^{t}K(t,s,x(s))\mathrm{d}s$ 其中 $k:R_+^2\times R^n\to R^n$，且 $K\in C([t_k,t_{k+1})\times(t_k,t_{k+1})\times R^n,R^n)$。

(iii) $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$。

(iv) $I_k:R^n\to R^n$。

(v) $k(t,t,0)\equiv 0, f(t,0,0)\equiv 0, I_k(0)\equiv 0$ $(\forall k\in N)$。保证系统(1)的零解存在，并设系统(1)的解整体存在唯一。

为方便起见，记 $\Gamma=\{h\in C[R_+\times R^n,R_+]$：在 $[t_{k-1},t_k)\times R^n$ 上连续，$\forall x\in R^n$，$\lim\limits_{(t,y)\to(t_k^+,x)}h(t,y)=h(t_k^+,x)$ 存在，且 $\inf\limits_{(t,x)}h(t,x)=0,(t,x)\in R_+\times R^n\}$；

$P=\{a\in C[R_+\times R_+], a(0)=0, a(s)$ 非减$\}$；

$K_0=\{a\in C[R_+\times R_+], a(0)=0, a(s)$ 非减$\}$；

$K=\{a\in K_0$，且 $a(s)$ 非减$\}$；

$PC^+K=\{\sigma:R_+\times R_+\to R_+, \forall u\in R_+, \sigma(\cdot,u)\in PC^+, \quad \forall t\in R_+, \sigma(t,\cdot)\in K\}$；

$V_0=\{V:R_+\times R^n\to R_+$，在 $[t_{k-1},t_k)\times R^n$ 上连续可微，关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，$V(t_k^-,x)=V(t_k,x)$，$V(t_k^+,x)$ 存在，$k=1,2,\cdots,x\in R^n\}$。

设 $V\in V_0$，对 $\forall(t,x)\in[t_{k-1},t_k)\times R^n$ 定义：

$$D^-V(t,x)=\lim_{h\to V^-}\sup\frac{1}{h}[V(t+h,x+hf(t,x))-V(t,x)]。$$

设 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 为系统(1)的解。

记 $\dot{V}(t,x(t))=V_t(t,x(t))+V_x(t,x(t))f(t,$

2011 年 9 月 1 日收到　国家自然科学基金(10871120)资助
第一作者简介：郑海滨(1987—)，山东青州市人，硕士研究生。研究方向：应用微分方程。
*通信作者简介：傅希林，男，山东师范大学数学科学学院教授。

$x(t)), t \neq t_k$;

$\Delta V(t_k, x(t_k)) = V(t_k^+, x(t_k) + I_k(x(t_k))) - \dot{V}(t_k, x(t_k))$; $\dot{V}(t_k, x(t_k)) = \lim_{t = t_k^-} \dot{V}(t, x(t))$;

定义 1 称函数 $m(t) \geqslant 0$ 在区间 (a,b) 上有界增长,若

(i) $m(t)$ 在 (a,b) 上连续;

(ii) 存在 $d \in P$,使 $Dm(t) \leqslant d(m(t))$, $\forall t \in (a, b)$。其中 D 为任一 Dini 导数;

(iii) 对 $\forall \delta_1 > 0$, $\exists \delta_2 \in (0, \delta_1)$,使得

$$\int_{\delta_2}^{\delta} \frac{\mathrm{d}m}{d(m)} \geqslant b - a \text{。}$$

定义 2 称函数 $m(t) \geqslant 0$ 在区间 (a_k, b_k) 上一致有界增长,若

(i) 对每个 k, $m(t)$ 在 (a_k, b_k) 上连续且有界增长;

(ii) 对 $\forall \delta_1 > 0$, $\exists \delta_2 \in (0, \delta_1)$,使得 $\int_{\delta_2}^{\delta} \frac{\mathrm{d}m}{d_k(m)} \geqslant b_k - a_k$ 对所有 k 一致成立,其中 d_k 由 (i) 中 $m(t)$ 在 (a_k, b_k) 上有界增长的定义确定。

定义 3 设 $t = b$ 为左连续函数 $m(t) \geqslant 0$ 的跳跃间断点,若存在 $d \in P$,使得 $m(b^+) \leqslant d(m(b))$,则称 $m(t)$ 在 $t = b$ 处有界增长。

定义 4 设 $t = b_k$ 为左连续函数 $m(t) \geqslant 0$ 的跳跃间断点,称 $m(t)$ 在 $t = t_k, k = 1, 2, \cdots, r \leqslant \infty$ 处一致有界增长,若

(i) 对每个 k, $m(t)$ 在 b_k 处有界增长;

(ii) 对 $\forall \delta_1 > 0$, $\exists \delta_2 \in (0, \delta_1)$,使得当 $m(b_k) < \delta$ 时有 $d_k(m(b_k)) < \delta_i$ 对所有 k 一致成立。

定义 5 设 $h_0, h \in \Gamma$,称系统(1)为

(i) (h_0, h) – 一致稳定:若 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t_0 \in R_+$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$,使得当 $h_0(t_0, x_0) < \delta$ 时,有 $h(t, x(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0$;

(ii) (h_0, h) – 一致渐近稳定:若系统(1)为 (h_0, h) – 为一致稳定,且对 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t_0 \in R_+$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 及 $T = T(\varepsilon)$,使得当 $h_0(t_0, x_0) < \delta$ 时,有

$$h(t, x(t)) < \varepsilon, t \geqslant t_0 + T\text{。}$$

下面给出本文的几个主要结果。

定理 1 $h_0, h \in \Gamma, V \in V_0$ 且满足:

(i) h_0 比 h 一致好;

(ii) 存在 $a, b \in K$ 和常数 $u_0 > 0, \alpha_0 \in (0, \rho]$,使得:$V(t,x) \geqslant b(h(t,x)), h(t,x) < \alpha_0$;

$V(t,x) \leqslant a(h_0(t,x)), h_0(t,x) < u_0$。

(iii) 存在 $0 < \rho^* < \rho$,对所有 $k \in N$,当 $V(t_k, x_k) < b(\rho^*), b \in K$;

(iv) 对系统(1)任意的解 $x(t)$,当 $P(V(t, x(t))) \geqslant V(t, x(t)) V(s, x(s)), t_0 \leqslant s \leqslant t$ 有 $D^- \dot{V}(t, x) \geqslant 0, (t,x) \in S(h, \rho)$,且对所有的 k 有 $\Delta t_k \dot{V}(t_k, x) + \Delta(t_k, x) \leqslant 0$ 其中 $P \in C(R_+, R_+)$, $P(s) \geqslant MS, M \geqslant 1$;

(v) $V(t,x)$ 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长;

(vi) $V(t,x)$ 在 t_k 处一致有界增长。

则系统(1)是 (h_0, h) – 一致稳定的。

证明 由(i),存在函数 $\varphi \in PC^+K$,常数 $\delta_1 > 0$,使得当 $h_0(t,x) < \delta_1$ 时,有 $h(t,x) < \varphi(h_0, (t,x))$。

$V(t,x)$ 在 (t_{k-1}, t_k) 上一致有界增长,则

$\dot{V}(t,x) \leqslant d_k(V(t,x))$, $\forall \varepsilon < \rho^*$, $\rho^* = \min(\rho_0, \alpha_0)$, $\exists V_1 = V_1(\varepsilon) < h(\varepsilon)$,有

$$\int_{V_1}^{b(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}s}{d_k(s)} \geqslant \Delta t_k \tag{2}$$

取 $q = \min\{k : t_k \geqslant 0\}$。由 $V(t,x)$ 在 t_q 上有界增长,则 $\exists V_2 = V_2(t_0, \varepsilon) < V_1$,使得当 $V(t_q, x(t_q)) < V_2$ 时,有

$$V(t_q^+, x(t_q^+)) + I(x(t_q)) < V_1 \tag{3}$$

再由 $V(t,x)$ 在 (t_{q-1}, t_q) 上有界增长,知

$\exists V_0 = V_0(t_0, \varepsilon) < V_2$,使得

$$\int_{V_0}^{V_2(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}s}{d_q(s)} \geqslant \Delta t_q \tag{4}$$

选取 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0, \delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$,使得

$a(\delta_2) < V_0, \varphi(\delta_3) < \varepsilon$。令 $\delta = \min\{\mu_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ 当 $h_0(t_0, x_0) < \delta$ 时,

$$V(t_0, x_0) \leqslant a(h_0(t_0, x_0)) < a(\delta) < V_0 < V_2 < V_1 < b(\varepsilon) \tag{5}$$

再由条件(i),有

$h(t_0, x_0) \leqslant \varphi(h_0(t_0, x_0)) < \varphi(\delta) \leqslant \varphi(\delta_3) < \varepsilon$。

下证 $V(t,x(t)) < b(\varepsilon), t \geqslant t_0$。　(6)

用反证法。若不然，则存在系统(1)满 $h_0(t_0, x_0) < \delta$ 使其广解 $x(t)$ 及 $t^0 \in (t_j, t_{j+1})$，使得

$V(t^{0+}, x(t^{0+})) \geqslant b(\varepsilon)$，且 $V(t,x) < b(\varepsilon), t \in [t_0, t_j]$　(7)

则由条件(iii)知 $V(t_j^+, x(t_j^+)) < b(\rho)$，$\because V(t,x) < b(\varepsilon), \varepsilon < \rho$，由(iii)存在

$0 < \rho^* < \rho$，对所有的 $k \in N$，当 $V(t_k, x_k) < b(\rho^*)$

时，$V(t_k, x_k + I(x_k)) < b(\rho)$，而

$V(t,x) < b(\varepsilon) < b(\rho^*)$，

$\therefore\ V(t_j^+, x(t_j^+)) < b(\rho)$)。

于是存在 $\tilde{t} \in [t_j, t^0]$ 使得

$b(\varepsilon) \leqslant V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) < b(\rho)$，且

$V(t,x) < b(\rho), h(t,x(t)) < \rho, t \in [t_0, \tilde{t}]$　(8)

下面令 $M > b(\rho)$，则当 $t \in [t_0, \tilde{t}]$ 时，有 $P(V(t,x)) \geqslant MV(t,x) \geqslant b(\rho)V(t,x) \geqslant V(S,x(S))V(t,x)$；$t_0 \leqslant S < t$。

从而由条件(iii)知，取 $q = \min\{k : t_k \geqslant t_0\}$，

$$j = \max\{k : t_k \leqslant \tilde{t}\}。$$

1.1　当 $j \geqslant q$ 时

1^0　若 $j > q, k = q+1, \cdots, j$；

$V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) = V(t_k^+, x(t_k^+)) - V(t_k, x(t_k)) + V(t_k, x(t_k)) - V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+)) = \Delta V(t_k, x(t_k)) + V(t_k, x(t_k))\Delta t_k \leqslant 0$。

则 $V(t_k^+, x(t_k^+)) \leqslant V(t_{k-1}^+, x(t_{k-1}^+))$，从而有

$$V(t_j^+, x(t_j^+)) \leqslant V(t_q^+, x(t_q^+)) \tag{9}$$

2^0　若 $j = q$，显然，式(9)成立。

下证 $V(t_j^+, x(t_j^+)) < V_1$。

由式(2)、式(4)、式(5)可知

$$\int_{V_0}^{V(t_q, x(t_q))} \frac{ds}{dq(s)} < \int_{V_0(t_0^+, x(t^+))0}^{V(t_q, x(t_q))} \frac{ds}{dq(s)} \leqslant t_q - t_0 \leqslant \Delta t_q \leqslant \int_{V_0}^{V_2} \frac{ds}{dq(s)}。$$

则 $V(t_q, x(t_q)) < V_2$，

由式(3)知，$V(t_q^+, x(t_q^+)) < V_1$，从而由式(9)可得式(10)成立。

1.2　当 $j < q$ 时，$t_j < t_0$，$V(t_0^+, x(t_0^+)) < V_0 < V_1$。

综合 1.1、1.2，令 $t^* = \max\{t_j, t_0\}$，则有

$$V(t^{*-1}, x(t^{*-1})) < V_1 \tag{11}$$

易知 $\tilde{t} \in [t^*, t_{j+1})$。

1^0　若 $\tilde{t} \in [t^*, t_{j+1}]$，则有式(1)，式(7)，式(10)得

$$\Delta t_{j+1} \geqslant \tilde{t} - t^* \geqslant \int_{V(t^{*+}, x(t^{*+}))}^{V(\tilde{t}, x(\tilde{t}))} \frac{ds}{d_{j+1}(s)} > \int_{V_1}^{b(\varepsilon)} \frac{ds}{d_{j+1}(s)} \geqslant \Delta t_{j+1}。$$

矛盾。

2^0　若 $\tilde{t} = t^*$，则由式(1)，式(7)，式(10)可得：

$b(\varepsilon) \leqslant V(\tilde{t}^+, x(\tilde{t}^+)) = V(t^{*+}, x(t^{*+})) < V_1 < b(\varepsilon)$。

矛盾。

综上所述，式(6)成立，因此系统(1)是 (h_0, h) – 一致稳定的。

定理 2　如果定理 1 的条件成立，且进一步设

(iv)′存在函数 $c \in K_0$，常数 $\mu_k \geqslant 0$，使得 $\Delta t_k(t_k, x) + \Delta V(t_k, x) \leqslant \mu_k c(V(t_k, x))$，$(t,x) \in s(h,\rho)$，$c \in c[R^+, R^+]$；

(vi)′Δt_k 一致有界；

(vii)对任意给定正数 C，存在正整数 N，使得 $\sum_{k=q+1}^{q+N} \mu_k > C, \forall q \geqslant 0$；

则系统(1)是 (h_0, h) – 一致渐近稳定的。

定理 2 的证明类似定理 1(略)。

参　考　文　献

1　傅希林，闫宝强，刘衍胜. 脉冲微分系统引论. 北京：科学出版社，2005

2　张立琴，王金环，代新利. 广义二阶导数方法与具有时滞的脉冲微分系统的有界性. 科学技术与工程，2004；(10)；822—824

3　Fu X L，Lao H X. Generalized second derivative method and stability criteria for impulsive differential systems. Dynam Contin Discrete Impuls Systems，2005；12(2)：247—262

(下转第 8113 页)

$$\frac{1}{36} \leqslant \exp\left\{-\int_{t_k}^{k+1}\chi(s)\,\mathrm{d}s\right\}, \forall k;$$

$$(2)\ \exp\left\{\int_{t_0}^{t}\sigma(s)\,\mathrm{d}s\right\} < b(A)/a(\lambda),$$

$$\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\chi(s)\,\mathrm{d}s\right\} < b(A)/a(\lambda)\ 。$$

则比较系统实际稳定,因此我们得到,由定理2,原系统相应实际稳定。

参 考 文 献

1 Liu Xinzhi. Practical stability of control system with impulse effects. J Mathanal Appl, 1992;166:563—576

2 McRae F A. Practical stability of impulse control system. J Mathanal Appl ,1994;181: 656—672

3 Lakshmikontham V, Leela S, Martynyu A A. Practi-cal Stability of Nonlinear Systems. World Scientific Singapore,1990 :157—158

4 Lakshmikontham V, Leela S. Cone-valued Lyaounov functions. Nonlinear Analysis,Methods and Applications,1977;3 :215—222

The Stability Study of One Class of Impulsive Control Differential Systems

DENG Hui,ZHANG Li-qin*

(School of Mathematics Science,Shandong Normal University,Jinan 250014 , P. R. China)

[**Abstract**] Employing cone-valued Lyapunov function method, the stabilization of control systems with fixed moments of impulsive effects by estabilishing a new comparison result is considered.

[**Key words**] impulsive control systems control set stability

(上接第 8109 页)

Stability for One Impulsive Integro-differential Systems

ZHENG Hai-bin,FU Xi-lin*

(Shandong Normal University,Jinan 250014,P. R. China)

[**Abstract**] The stability for impulsive Integro-Differential systems is studied by the method of the generalized second derivative and Razumikin technique. The result of the stability in the terms of two measures are gained.

[**Key words**] impulsive integro-differential systems the generalized second derivative Razumikin technique stability two measures