

新型波浪方程中类 Sommeerfeld 积分项的计算方法

金红^{1,2} 邹志利² 房克照²

(大连市环境科学设计研究院¹, 大连 116023; 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室², 大连 116024)

摘要 给出的具有精确色散性的非线性波浪方程, 方程中含有类 Sommeerfeld 积分项。积分项的数值计算是建立基于这一组方程的波浪模型的关键之处。针对这一积分特点, 采用分段解析计算方法对这一积分项进行数值求解。数值结果和解析结果进行对比且两者吻合良好, 表明这一计算方法是有效的, 可用于建立基于上述方程的新型波浪模型。

关键词 类 Sommeerfeld 积分 波浪方程 解析解

中图法分类号 O175.6; **文献标识码** A

目前被广泛应用于海岸工程中的模型主要为基于缓坡方程的计算模型和基于 Boussinesq 型方程的计算模型。但其各自具有局限性。因为 Boussinesq 方程是以浅水波基本控制方程为基础导出的, 色散性是近似的, 其应用通常局限于中等水深和中等振幅波; 另一方面, 缓坡方程具有很宽的波浪频率(从长波到短波)和水深(从浅水到深水)适用范围, 但其是基于线性波浪理论推导得出的, 只适用于微幅波。文献[1]克服了这些不足, 给出了一组新的波浪方程, 其具有精确的色散性、非线性近似至三阶, 且适用于不规则波浪。但由于方程属于微分-积分方程, 不仅存在微分项, 同时还存在积分项, 且该积分项类似涡流无损检测问题中的 Sommeerfeld 积分^[2]。所以, 在数值求解该方程的过程中, 积分算子 T 的存在增加了数值求解的难度。积分项的处理成为整个计算过程中非常重要的一环, 能否准确计算积分算子 T , 是数值求解的关键。对于一般的积分, 通常可以采用数值积分的方法, 例如高斯型积分法以及自适应 Simpson 积分法。但用于本

文这种特殊的类 Sommeerfeld 积分则需要耗费大量的机时。本文针对类 Sommeerfeld 积分项的固有特点, 采用分段解析计算的方法, 进行数值求解, 并应用于数值模型验证, 结果表明这一计算方法是有效的。

1 控制方程

文献[1]给出具有精确色散关系的非线性波浪方程的一阶形式, 其表达形式如下:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + T \nabla^2 \varphi_\eta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_\eta}{\partial t} + g \eta = 0 \quad (2)$$

式中: η 为波面升高, φ_η 为自由表面处速度势, g 为重力加速度, T 为积分算子, 表达式如下:

$$T(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') G(x - x') dx' \quad (3)$$

G 为核函数, 表达式如下:

$$G(\chi) = -\frac{1}{\pi} \ln \left(\tanh \left(\frac{\pi |\chi|}{4} \right) \right) \quad (4)$$

式(4)中, $\chi = |x - x'|/h$, h 为水深。

2 积分项形式分析

控制方程式中存在积分项: $T \nabla^2 \varphi_\eta$ 。分析式

2011年8月24日收到, 9月1日修改

国家自然科学基金

基金(51009018)资助

第一作者简介: 金红(1979—), 女, 博士, 研究方向: 海岸及近海工程。

(3)、式(4)可得到该积分的几个特征或者难点。首先, T 积分为广义积分。其次,核函数存在奇点($\chi=0$)。再次,积分函数 $f(x)$ 为波浪曲线,即为震荡函数。另外,核函数为偶函数,核函数呈指数衰减,当 $|\chi|>3$ 时几乎衰减为零。可以说,该积分集中了所有较难处理的积分现象:反常积分、无穷区间积分、震荡函数积分。这些特征给数值求解带来了一定的难度。

一般对反常积分的处理方法主要为:变量置换法、区间截断法和高斯型积分法。其中,区间截断法和高斯型积分法都可以用来解决本文问题,而经过尝试,变量置换法不适用于本文问题。对无穷区间积分的处理,类似于反常积分处理。对于震荡函数积分,采用通常的数值积分方法计算效果都不好,通常采用特殊方法进行处理:在零点之间用高斯型积分法或自适应 Simpson 积分法等进行积分。经过尝试,对于本文问题数值求解需要耗费大量的机时。本文根据波浪方程中类 Sommeefeld 积分项的固有特点,采用分段解析计算的方法,进行数值求解。

3 数值求解

控制方程为积分微分方程,微分项采用常规的蛙跳差分格式^[1],积分项 $T \nabla^2 \varphi_\eta$ 的数值求解在本文中作重点讨论。

常水深条件下,控制点 x_i 处的 T 积分可写为如下形式:

$$T\{f(x_i,t)\} = \int_{x_i-\lambda h}^{x_i+\lambda h} f(x',t) G(x_i-x') dx' \quad (5)$$

式(5)中, λ 为积分限参数,称 $|x_i-x'|/h \leq \lambda$ 区间为核函数影响区间,其余区域可忽略不计,通常取 $\lambda=3$ 。

方程的差分格式为显格式,被积函数 $f(x',t)$ 在各差分网格节点上的值均为已知,因此可以采用 2 个网格上 3 个节点值将其表达成二次多项式的形式。这样可以把式(5)积分域划分为若干个由 2 个网格构成的积分单元,整个积分域被划分为 $2N+1$ 个。如图 1 所示,积分单元的位置在图中由 n 来表

示, N 为积分域的分段参数,其计算式如下:

$$N = \text{int}\left(\frac{\lambda h}{2\Delta x} + 0.5\right) \quad (6)$$

式(5)中积分可写成 $2N+1$ 个积分单元上的积分和的形式:

$$T\{f(x_i,t)\} = \sum_{n=-N}^N s_n, s_n = \int_{x'_i+2n-1}^{x'_i+2n+1} f(x',t) G(x_i-x') dx' \quad (7)$$

式(7)中, s_n 表示积分单元上的积分。

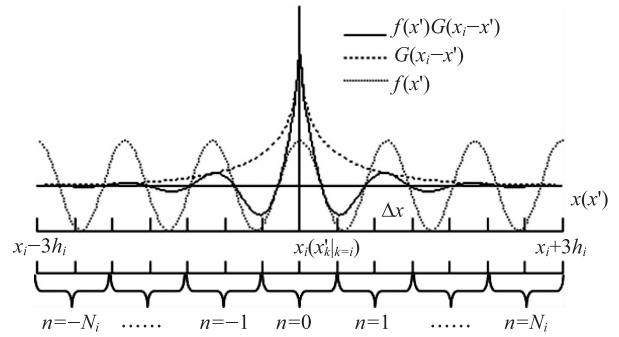


图 1 积分算子 T 计算示意图

核函数 $G(x_i-x')$ 同样也表达成多项式的形式。由于核函数存在奇点,因此需要对零点附近和其他位置处分别进行处理。在离开零点处,同被积函数 $f(x',t)$ 一样,采用二次多项式来表示(下称核函数多项式(i));在零点附近则采用对数(即 $\ln$ 函数)多项式来表示(下称核函数多项式(ii))。

3.1 $s_n(n \neq 0)$ 的计算

应用 2 次拉格朗日插值公式(见文献[3]第 899 页),被积函数 $f(x',t)$ 和核函数 $G(x_i-x')$ 可表示为

$$f(x',t) = \sum_{k=i+2n-1}^{i+2n+1} a_k(x') f(x'_k,t) \quad (8)$$

$$G(x_i-x') = \sum_{k=i+2n-1}^{i+2n+1} a_k(x') G(x_i-x'_k) \quad (9)$$

式(9)即为核函数多项式(i)。式(8)、式(9)中, $f(x'_k,t)$ 、 $G(x_i-x'_k)$ 为被积函数、核函数在网格节点上的值,插值基函数 $a_k(x') = \prod_{\substack{l=i+2n-1 \\ l \neq k}}^{i+2n+1} \left(\frac{x'-x'_l}{x'_k-x'_l} \right)$ 。为编程和表达方便,式(8)、式(9)可写成矩阵乘积的形式:

$$f(x',t) = AF', G(x_i-x') = EA' \quad (10)$$

式(10)中,

$$E = (G(x_i - x'_{i+2n-1}) \quad G(x_i - x'_{i+2n}) \quad G(x_i - x'_{i+2n+1}));$$

$$F = (f(x'_{i+2n-1}, t) \quad f(x'_{i+2n}, t) \quad f(x'_{i+2n+1}, t));$$

$$A' = \begin{pmatrix} \left(\frac{x' - x'_{i+2n}}{x'_{i+2n-1} - x'_{i+2n}} \right) \left(\frac{x' - x'_{i+2n+1}}{x'_{i+2n-1} - x'_{i+2n+1}} \right) \\ \left(\frac{x' - x'_{i+2n-1}}{x'_{i+2n} - x'_{i+2n-1}} \right) \left(\frac{x' - x'_{i+2n+1}}{x'_{i+2n} - x'_{i+2n+1}} \right) \\ \left(\frac{x' - x'_{i+2n-1}}{x'_{i+2n+1} - x'_{i+2n-1}} \right) \left(\frac{x' - x'_{i+2n}}{x'_{i+2n+1} - x'_{i+2n}} \right) \end{pmatrix}.$$

A' 、 F' 分别为 A 、 F 的转置, E 、 F 中的元素均为已知。 E 和 F' 中各元素都与积分变量 x' 无关,可以提到积分号外面,积分单元上的积分 s_n ($n \neq 0$)可写为:

$$s_n = E \left(\int_{x'_{i+2n-1}}^{x'_{i+2n+1}} A' Adx' \right) F' \quad (11)$$

将式(11)中右端多项式的积分记为 B ,即有:

$$B = \int_{x'_{i+2n-1}}^{x'_{i+2n+1}} A' Adx' \quad (12)$$

将 A 、 A' 的表达式代入式(12),解析积分可得:

$$B = \frac{\Delta x}{15} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (13)$$

因此,积分单元上的积分 s_n ($n \neq 0$)最终可表示为:

$$s_n = EBF' \quad (14)$$

观察式,可得到如下信息。多项式的积分结果 B 跟 i 、 n 均无关,为常数矩阵,即对任意控制点的任意位置处的积分单元,其值均为定值,不再改变。核函数节点值 E 跟 i 无关,只跟 n 有关,也即其只随着积分单元位置(或积分点 x' 与控制点 x_i 间的距离)有关,跟控制点位置无关。被积函数节点值 F 跟控制点位置 i 、积分单元位置 n (积分点 x' 离控制点 x_i 的距离)以及时间 t 均相关。由此,在程序运算时,可在程序运行初始,就将 B 与 E 乘积的结果事先计算好,存为数组,在以后每一时间、空间步进过程中直接调用即可,需要更新的仅是被积函数节点值 F 。这样处理的好处是,可以省去一些重复性计算,节省大量不必要的计算时间。

3.2 s_n ($n=0$) 的计算

鉴于核函数的特殊性,采用对数函数多项式来

近似表示:

$$G(\chi) = c_1 + c_2 \ln \chi^2 + c_3 \chi^2 + c_4 \chi^2 \ln \chi^2 + c_5 \chi^4 + c_6 \chi^4 \ln \chi^2 \quad (15)$$

上式(15)即为核函数多项式(ii)。

欲应用该式对积分单元上的积分进行解析求解,首先需要确定式(15)中的各系数 c_k ($k=1,2,\dots,6$),具体求解过程如下:

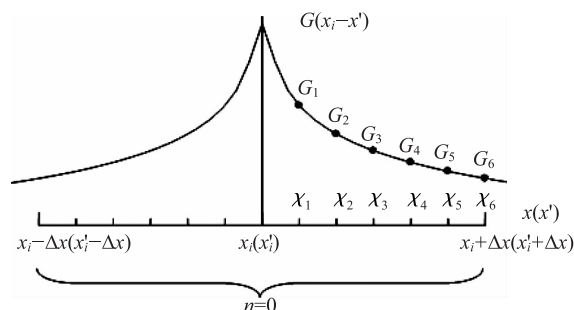


图2 核函数多项式(ii)计算示意图

图2给出核函数多项式(ii)的计算示意图,如图所示,计算中将 $(x'_i, x'_i + \Delta x]$ 区间平均分割,得到6个插值点,在各插值点上求出对应的核函数无因次自变量 χ_k 的值,即:

$$\chi_k = \frac{k\Delta x}{6h} \quad (k=1,2,\dots,6) \quad (16)$$

通过核函数解析式求出插值点上的核函数值 G_k ($k=1,2,\dots,6$),分别将插值点以及插值点上核函数的值代入式(15)中,可得到一组方程,通过对线性代数方程组的求解^[4-6],最终求出核函数多项式(ii)的系数 c_k ($k=1,2,\dots,6$)。之所以只在正半轴上选择插值点,是因为核函数为偶函数,所求出插值多项式在负半轴上也自然成立。

被积函数 $f(x', t)$ 依旧采用拉格朗日插值多项式来表达,同样地,为编程和表达方便,将式写成如下矩阵乘积的形式:

$$G(x_i - x') = CP' \quad (17)$$

式(17)中,

$$C = (c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6) \quad (18)$$

$$P = (1 \quad \ln(\chi^2) \quad \chi^2 \quad \chi^2 \ln(\chi^2) \quad \chi^4 \quad \chi^4 \ln(\chi^2)) \quad (19)$$

P' 为 P 的转置。积分单元上的积分 s_0 可以

写为:

$$s_0 = \int_{x'_{i-1}}^{x'_{i+1}} CP'AF'dx' \tag{20}$$

$C、F'$ 中各元素都与积分变量 x' 无关,可以提到积分号外面,因此,式还可以表示为:

$$s_0 = C \left(\int_{x'_{i-1}}^{x'_{i+1}} P'Adx' \right) F' \tag{21}$$

式(21)中右端多项式的积分记为 D ,即有:

$$D = \int_{x'_{i-1}}^{x'_{i+1}} P'Adx' \tag{22}$$

将 $P'、A$ 的表达式代入式(22),解析积分可得:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{3}\ln\zeta^2 - \frac{2}{9}\right) & \left(\frac{4}{3}\ln\zeta^2 - \frac{32}{9}\right) & \left(\frac{1}{3}\ln\zeta^2 - \frac{2}{9}\right) \\ \frac{1}{5}\zeta^2 & \frac{4}{15}\zeta^2 & \frac{1}{5}\zeta^2 \\ \left(\frac{1}{5}\ln\zeta^2 - \frac{2}{25}\right)\zeta^2 & \left(\frac{4}{15}\ln\zeta^2 - \frac{64}{225}\right)\zeta^2 & \left(\frac{1}{5}\ln\zeta^2 - \frac{2}{25}\right)\zeta^2 \\ \frac{1}{7}\zeta^4 & \frac{4}{35}\zeta^4 & \frac{1}{7}\zeta^4 \\ \left(\frac{1}{7}\ln\zeta^2 - \frac{2}{49}\right)\zeta^4 & \left(\frac{4}{35}\ln\zeta^2 - \frac{96}{1225}\right)\zeta^4 & \left(\frac{1}{7}\ln\zeta^2 - \frac{2}{49}\right)\zeta^4 \end{pmatrix} \Delta x \tag{23}$$

式(23)中, $\zeta = \Delta x/h$ 。因此, $n=0$ 位置处积分单元上的积分 s_0 最终可表示为:

$$s_0 = CDF' \tag{24}$$

同样地,在程序运行初始,事先将 C 与 D 的乘积结果先计算好,在以后沿空间、时间步进的过程中,仅更新 F 即可。实践证明,在积分点 x' 较接近控制点 x_i 处,多项式能够很好地逼近核函数的真值。

4 数值结果和讨论

首先对核函数的计算方法进行检验。在上节中给出两种核函数的多项式形式,非零点处($n \neq 0$)的多项式(9),即核函数多项式(i),零点处($n=0$)的多项式(15),即核函数多项式(ii)。由于核函数越靠近零点变化越陡,越远离零点变化越缓慢,如图1所示,因此,这里选取 $n=1$ 和 $n=0$ 两种具有代表性的情况进行分析。通过选取一定数量的测点,比较多项式与解析表达式之间的误差,通过误差分

析来检验由多项式表示的核函数的精度。将图1中 $n=0$ 和 $n=1$ 两个区间单独拿出来,见图3,图3中, $\Delta\chi_0 = \Delta\chi/6, \Delta\chi = \lambda/(2N+1), \lambda = 3$ 。

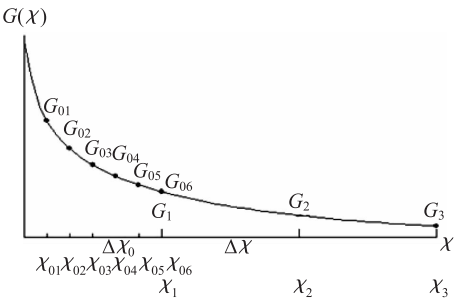


图3 核函数多项式计算插值点示意图

根据式(9), $n=1$ 区间核函数可写为:

$$G_1(\chi) = \frac{1}{(\Delta\chi)^2} \left(\frac{1}{2}(\chi - 2\Delta\chi)(\chi - 3\Delta\chi)G_1 - (\chi - \Delta\chi)(\chi - 3\Delta\chi)G_2 + \frac{1}{2}(\chi - \Delta\chi)(\chi - 2\Delta\chi)G_3 \right) \tag{25}$$

式(25)中, $G_1、G_2$ 和 G_3 可通过核函数解析式计算,这样,核函数 $n=1$ 区间就被表示为一个2次多项式。根据式, $n=0$ 区间核函数可写为:

$$G_0(\chi) \approx c_1 + c_2\ln\chi^2 + c_3\chi^2 + c_4\chi^2\ln\chi^2 + c_5\chi^4 + c_6\chi^4\ln\chi^2 \tag{26}$$

将自变量 $\chi_{01}、\chi_{02}、\chi_{03}、\chi_{04}、\chi_{05}、\chi_{06}$ 以及相应函数值 $G_{01}、G_{02}、G_{03}、G_{04}、G_{05}、G_{06}$ 分别代入式(26)中,得到6个方程,通过求解线性方程组可以得到系数 $c_1、c_2、c_3、c_4、c_5$ 和 c_6 的具体的值。式(26)中 $G_0(\chi)$ 关于 $\chi=0$ 对称,虽然求解时只是针对 $n=0$ 区间 $\chi>0$ 的部分来做的。但是,由于对称关系,式(26)在 $n=0$ 区间 $\chi<0$ 的部分也是满足的,因此,式(26)为核函数在 $n=0$ 区间的多项式表达。取不同的 N 值时, $\chi_1 \leq \chi \leq \chi_3$ 区间 $G_1(\chi)$ 的误差 ε_1 和 $\chi_{01} \leq \chi \leq \chi_{06}$ 区间 $G_0(\chi)$ 的误差 ε_2 见表1,同时还给出了 $0<\chi \leq \chi_{01}$ 区间 $G_0(\chi)$ 的误差 ε_3 ,误差计算公式如式(27)。

$$\varepsilon = \frac{\sum_k |G(\chi_k) - G^*(\chi_k)|}{\sum_k |G^*(\chi_k)|} \tag{27}$$

式(27)中, χ_k 为测点,除已给的自变量(插值点)外,其余为将 $\Delta\chi$ 或 $\Delta\chi_0$ 二分10次得到。 $G^*(\chi_k)$ 为多

项式计算的核函数在测点上的值, $G^*(\chi_k)$ 为核函数解析表达式计算的核函数在测点上的值。

由表 1 可知, ε_1 随着 N 的增大逐渐变小, 但是, 当 $N > 20$ 时, 虽然随着 N 的取值的增大, 区间长度变小很多, 但是, ε_1 的值变化较缓慢, 这是因为, 随着 N 值的增大, $n=1$ 区间也越靠向 $\chi=0$ 处, 而越接近 $\chi=0$ 处核函数的变化也越陡, 因此, 依旧采用 2 次多项式来近似核函数精度提高不大。对于任意 N 的取值, 误差 ε_2 和 ε_3 都很小。表 1 说明了保证 N 值不小于 10 的话, 核函数多项式的误差均能保证在 1% 以内。

表 1 核函数多项式计算误差表

N	ε_1	ε_2	ε_3
0	—	4.70×10^{-4}	9.31×10^{-3}
1	0.14	7.78×10^{-7}	4.39×10^{-5}
2	4.32×10^{-2}	5.17×10^{-8}	3.10×10^{-6}
5	1.39×10^{-2}	4.04×10^{-10}	2.85×10^{-8}
10	8.38×10^{-3}	6.83×10^{-12}	5.37×10^{-10}
20	5.88×10^{-3}	1.01×10^{-13}	8.66×10^{-12}
50	4.19×10^{-3}	3.61×10^{-16}	3.47×10^{-14}
100	3.43×10^{-3}	7.72×10^{-17}	9.09×10^{-16}
200	2.90×10^{-3}	7.67×10^{-17}	1.36×10^{-16}
500	2.41×10^{-3}	1.17×10^{-16}	3.14×10^{-15}
1000	2.14×10^{-3}	1.13×10^{-16}	1.45×10^{-15}

注 1) N 为积分域分段参数, 积分域划分为 $2N+1$ 个积分单元。

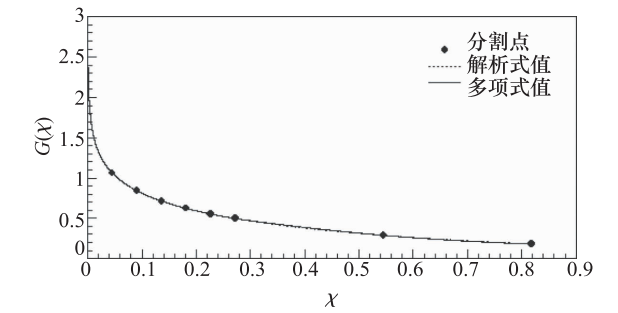


图 4 核函数解析式与多项式曲线对比图($N=5$)

图 4、图 5 和图 6 分别给出了 $N=5$ 、 $N=10$ 和 $N=20$ 情况下, 核函数解析曲线与多项式曲线图。由图可知, 多项式对核函数有很好的近似。虽然

$\chi=0$ 为核函数的奇点, 但是由于多项式 (15) 在 $0 < \chi < \chi_{01}$ 区间, 也保持了很好的近似, 因此消除了核函数解析式的奇点特性。由于核函数越靠近零点变化越陡, 因此, 其他区间 ($n > 1$) 上的核函数的误差均小于 $n=1$ 区间上的核函数的误差, $n=1$ 区间满足计算要求, 则其他区间 ($n > 1$) 自动满足。

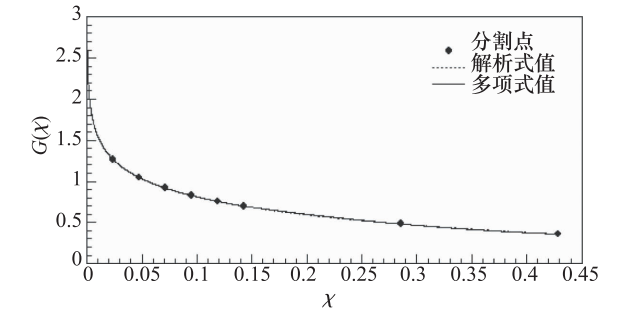


图 5 核函数解析式与多项式曲线对比图($N=10$)

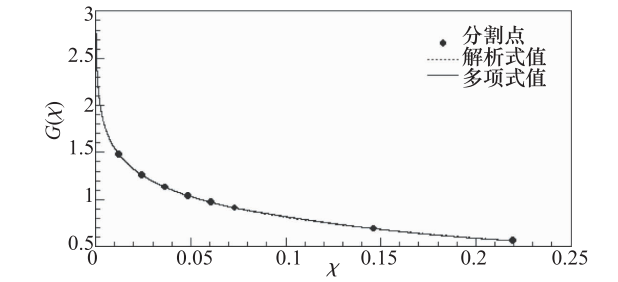


图 6 核函数解析式与多项式曲线对比图($N=20$)

其次, 来验证积分算子 T 的计算。积分算子 T 的的计算的检验公式的推导如下:

将积分算子 T 的表达式代入控制方程中, 并消去 φ_η , 得:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x'^2} G(x - x') dx' = 0 \quad (28)$$

波面函数定义为:

$$\eta(x, t) = \frac{H_0}{2} \cos(k_0 x - \omega_0 t) \quad (29)$$

相应地, 波面函数空间以及时间二次导数可表示为:

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{H_0}{2} \omega_0^2 \cos(k_0 x - \omega_0 t) \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \eta(x', t)}{\partial x'^2} = -\frac{H_0}{2} k_0^2 \cos(k_0 x' - \omega_0 t) \quad (31)$$

将式(30)、式(31)代入式(28)中,得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(k_0 x' - \omega_0 t) G(x - x') dx' = \frac{\omega_0^2}{gk_0^2} \cos(k_0 x - \omega_0 t) \quad (32)$$

通过式(32),可以对积分算子 T 的计算进行检验。

现给定检验条件为:时间 $t=0$,周期 $T_0=1.0\text{ s}$, $\omega_0=2\pi/T_0$,水深 $h=1.561\text{ 3 m}$ 。由线性色散关系式 $\omega_0^2=gk_0\tanh(gh)$ 来确定波数 k_0 。被积函数 $f(x')$ 定义为:

$$f(x') = \cos(k_0 x') \quad (33)$$

解析结果为:

$$T^*\{f(x_i)\} = \frac{\omega_0^2}{gk_0^2} \cos(k_0 x_i) \quad (34)$$

表 2 积分算子 T 的计算误差表

$L/\Delta x$	$\lambda=3$		$\lambda=6$	
	N	ε_T	N	ε_T
8	12	6.71×10^{-3}	24	2.03×10^{-3}
20	30	2.07×10^{-3}	60	1.37×10^{-3}
40	60	3.21×10^{-4}	120	6.08×10^{-4}
60	90	1.12×10^{-3}	180	3.81×10^{-4}
80	120	1.51×10^{-3}	240	2.73×10^{-4}

注 1) N 为积分域分段参数,积分域划分为 $2N+1$ 个积分单元。
注 2) λ 为积分限参数,即认为核函数影响区间在 λ 倍水深范围内。

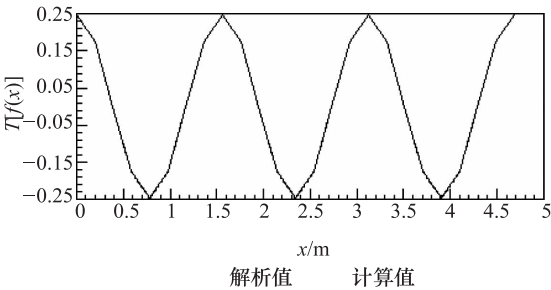


图 7 计算值 $T\{f(x)\}$ 和解析值 $T^*\{f(x)\}$ 的比较图

表 2 分别给出了积分范围为 3 倍水深 ($\lambda=3$) 和 6 倍水深 ($\lambda=6$) 情况下,取不同的步长 Δx 时积分算子 T 的误差。误差 ε_T 的计算公式为:

$$\varepsilon_T = \frac{\sum_i |T\{f(x_i)\} - T^*\{f(x_i)\}|}{\sum_i |T^*\{f(x_i)\}|} \quad (35)$$

由表 2 可知,核函数影响区间取得越大,积分越准确,一般情况下,积分上下限取为 3 倍水深即可满足要求,误差能够满足在 1% 以内。图 7 给出了 $L/\Delta x$,积分范围为 3 倍水深 ($\lambda=3$) 时计算值 $T\{f(x)\}$ 和解析值 $T^*\{f(x)\}$ 的比较图。

由图 7 可知,计算值 $T\{f(x)\}$ 和解析值 $T^*\{f(x)\}$ 吻合得很好。通过表 2 和图 7 的分析比较可知,一个波长内网格数不低于 8,在 3 倍水深积分范围内 N 值不低于 10,积分算子 T 就能够取得很好的精度。综上所述,本文介绍的积分算子 T 和核函数 G 的计算方法是有效的。

5 结论

本文讨论了一新型波浪方程中类 Sommeerfeld 积分项的数值求解方法。通过对积分项的分析得知该积分为反常积分、无穷区间积分、震荡函数积分。又因为核函数为偶函数且呈指数衰减,弥补了积分为广义积分的不足,使得数值求解该积分成为可能。针对积分项的固有特点,比较了现有的数值积分方法之后,本文采用分段解析计算的方法,进行数值求解。文中对积分算子 T 和核函数 G 的计算方法进行检验,结果表明这一计算方法是有效的。同时,讨论了核函数影响区间长度及区间内网格数的选取。保证 N 值不小于 10 的话,核函数多项式的误差均能保证在 1% 以内;积分上下限取为 3 倍水深即可满足要求,误差能够满足在 1% 以内。

总的来说,一个波长内网格数不低于 8,在 3 倍水深积分范围内 N 值不低于 10,积分算子 T 就能够取得很好的精度。

参 考 文 献

1 金 红,邹志利. 具有精确色散性的非线性波浪数学模型. 力学学报,2010;42(1): 23—34

2 幸玲玲,席保锋,盛剑霓. 涡流无损检测中类 Sommerfeld 积分的计算. 西安交通大学学报,1999;33(10): 23—26

(下转第 8123 页)

The Relationship between the Two Types of Topological Entropy

YANG Rong-ling

(Guangzhou college of South China University of Technology, Guangzhou 510640, P. R. China)

[Abstract] The conditions of Bowen’s definition of topological entropy and Pesin’s definition of topological entropy are more broad than the condition of the opening covered topological entropy, but their conditions are not the same, each has limitations. The relationship between Bowen’s definition of topological entropy and Pesin’s definition of topological entropy is introduced, pointing out that the equivalence of them under the same condition.

[Key words] topological entropy spanning sets separated sets string sets



(上接第 8119 页)

3 《数学手册》编写组. 数学手册. 北京:人民教育出版社,1979

4 刘德贵,费景高,于泳江,等. FORTRAN 算法汇编(第一分册). 北京:国防工业出版社,1980

5 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集(第二版). 北京:清华大学出版社,1997

6 何光渝,高永利. Visual Fortran 常用数值算法集. 北京:科学出版社,2002

Evaluation of Sommerfeld-like Integrals in Novel Wave Equations

JIN Hong^{1,2}, ZHOU Zhi-li², FANG Ke-zhao²

(Dalian Municipal Design and Research Institute of Environmental Science¹, Dalian 116023, P. R. China;
State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology², Dalian 116024, P. R. China)

[Abstract] A novel nonlinear wave equation with the accurate dispersion is presented. A Sommerfeld-like integration term appears in the equation and the accurate evaluation is the most important issue in developing wave model based on this new set of equation. To fulfil this aim, a piecewise integration method is developed to numerically calculate the Sommerfeld term. The numerical results are compared against the analytical solutions and good agreements are found, which demonstrates the efficiency of the proposed method for integration calculation and the method is recommended for use in developing the new wave model.

[Key words] Sommerfeld-like integrations wave model analytical solutions