

有界噪声与谐和激励下四分之一 车模型的 Melnikov 混沌

王振佩 徐 伟

(西北工业大学应用数学系,西安 710129)

摘要 研究了有界噪声与谐和激励作用下四分之一车模型的动力学行为。首先给出了有界噪声激励与谐和激励下四分之一车模型的具体表达式。然后利用随机 Melnikov 方法得到混沌运动的必要条件。结果表明临界幅值随着强度参数的增加而增加,且当强度参数增大到一定值时,临界幅值保持不变。最后,用两类数值方法即最大 Lyapunov 指数与庞加莱截面验证了上述结果。

关键词 有界噪声 随机 Melnikov 过程 混沌运动 四分之一车模型

中图分类号 U461.1; **文献标志码** A

四分之一车辆模型是一个很重要的模型,它虽然对现实中复杂的车辆模型作了简化,但是它的性质却很具有代表性。研究四分之一车辆模型在路面激励下的运动,对于研究现实中车辆的结构稳定性和行驶的舒适程度,具有重要的意义。

目前对四分之一车辆模型的研究已取得了一定的成果:Yahaya S, Johari O, Ghanib R^[1]给出了基于比例积分模变结构控制方案这样一种健壮的控制策略来控制四分之一车辆模型;Priyandoko G, Mailah M, Jamaluddin H^[2]对活跃车辆悬架系统进行太空梭和自适应神经活跃力控制(SANAFIC),突出了这样一种新的混合控制的可行性。Rao M 和 Prahlad V^[3]给出了一种新的模糊逻辑控制来提高系统在面对不确定路形时的舒适性。Litak G, Borowiec M, Ali M 等人^[4]给出了一种脉冲反馈控制来稳定车子运行的轨道。Rao L 和 Narayanan S^[5]利用 skyhook 控制对二自由度非线性四分之一车作了详细的讨论。Lauwerys C, Swevers J, Sas P 等人^[6]利用健壮线性控制实现了对线性四分之一车的有效控制。Narayanan S 和 Senthil S^[7]给出了一

种基于二自由度车辆模型的随机最优控制方法。另外,文献[8—11]主要研究了四分之一车辆模型的振动响应问题和舒适性问题。

目前研究系统混沌产生的解析方法有两种,其中最常用的就是 Melnikov 方法。近年来很多学者都利用 Melnikov 方法研究非线性动力系统,例如狄根虎、许勇、徐伟等人^[12]研究了一类广义流行病学模型,利用 Melnikov 方法得到了系统发生混沌的必要条件;Litak G, Borowiec M, Friswell M 等人^[13,14]针对在包含谐和及噪声成分的路面激励下的四分之一车辆模型,利用 Melnikov 方法给出了引起系统混沌振动的路面激励临界幅值;Raghavendra D 和 Pravin M^[15]研究了具有线性时间延迟主动控制的谐和激励非线性四分之一车模型的主响应及超谐、亚谐响应,利用 Melnikov 方法解析地得到了由同宿分岔到混沌产生的必要条件;Raghavendra D 和 Pravin M^[16]针对具有非对称势的单自由度四分之一车辆模型,利用 Melnikov 方法研究了系统稳定与不稳定流形的相交及混沌产生的必要条件。

虽然对四分之一车模型的研究比较多,但在有界噪声激励下的情形却很少考虑。因此有必要研究有界噪声激励下四分之一车模型的混沌运动。假设 $\xi(t)$ 是有界噪声,则

$$\xi(t) = \cos(\Omega_2 t + \Psi) \quad (1a)$$

$$\Psi = \sigma B(t) + \Gamma \quad (1b)$$

其中 Ω_2 是平均激励频率, $B(t)$ 是标准维纳过程, δ 是强度参数, Γ 是 $[0, 2\pi)$ 上的均匀分布。 $\xi(t)$ 的功率谱为

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sigma^2}{4(\omega - \Omega_2)^2 + \sigma^4} + \frac{\sigma^2}{4(\omega + \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right] \quad (2)$$

1 有界噪声与谐和激励下的四分之一车模型

单自由度四分之一车模型的运动方程(图1)为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k_1(x - x_0) + mg + F_h \left[\frac{d}{dt}(x - x_0), x - x_0 \right] = 0 \quad (3)$$

式(3)中 F_h 附加的非线性滞回悬架阻尼及与相关位移和速度相独立的刚度力, 具体的表达式为

$$F_h \left[\frac{d}{dt}(x - x_0), x - x_0 \right] = k_2(x - x_0)^3 + c_1 \frac{d}{dt}(x - x_0) + c_2 \left[\frac{d}{dt}(x - x_0) \right]^3 \quad (4)$$

路的剖面 x_0 可以表示成谐和与噪声的结合项, 即

$$x_0(t) = A \sin(2\pi v_0 t / \lambda) + \psi(v_0 t) \quad (5)$$

式(5)中 v_0 是车子的速度, λ 路面激励的波长, 且随机部分 $\psi(v_0 t)$ 是与位移 $z' = v_0 t$ 有关的随机过程。

在竖直位移上定义一个新变量。

$$y = x - x_0。$$

方程式(3)和式(4)变为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y + B_1 y^3 + B_2 \frac{dy}{dt} + B_3 \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 = -g + A \Omega^2 \sin(\Omega t) - \frac{d^2 \psi(v_0 t)}{dt^2} \quad (6)$$

式(6)中 $\Omega = 2\pi v_0 / \lambda$, $\omega^2 = k_1 / m$, $B_1 = k_2 / m$, $B_2 = c_1 / m$, $B_3 = c_2 / m$ 。我们假设路面激励的随机部分为:

$$\frac{d^2 \psi(z')}{dz'^2} = \sigma \xi(z') \quad (7)$$

式(7)中 $\xi(z')$ 是有界噪声。

为了使方程式(6)无量纲化, 定义 $\tau = \omega t$, 相

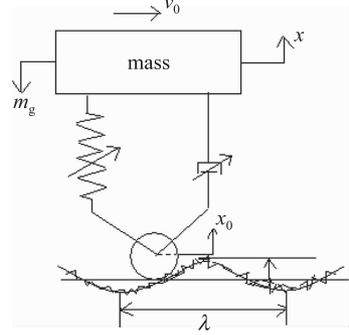


图1 四分之一车模型

对应的无量纲化方程(6)可表示为:

$$\ddot{y} + y + ky^3 + \alpha \dot{y} + \beta \dot{y}^3 = -g' + A \frac{\Omega^2}{\omega^2} \sin\left(\frac{\Omega}{\omega} \tau\right) - \frac{v_0^2 \sigma}{\omega^2} \cos\left(\frac{\Omega}{\omega} \tau + \psi\right) \quad (8)$$

式(8)中 $k = B_1 / \omega^2$, $\alpha = B_2 / \omega$, $\beta = B_3 \omega$, $g' = g / \omega^2$ 。

2 随机 Melnikov 过程

系统(8)的势函数为

$$V(y) = g'y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{4}y^4 \quad (9)$$

为了重整化势函数 $V(y)$, 令 $y = z + y_0$, 其中 y_0 是定点, 那么 $V_1(z) = V(y) - V(y_0)$, 我们得到

$$V_1(z) = \frac{k}{4} z^2 (z - z_1)(z - z_2) \quad (10)$$

式(10)中 $z_1 = 1.298$, $z_2 = 1.593$ 。外部势函数 $V(y)$ 和重整化势函数 $V_1(z)$ 如图2所示。系统(8)可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{z} = v \\ \dot{v} = -kz^3 + \frac{3k}{4}(z_1 + z_2)z^2 - \frac{k}{2}z_1 z_2 z + \varepsilon \left(-\tilde{\omega} - \left(\tilde{\beta}^3 + \tilde{A} \Omega'^2 \sin(\Omega' \tau) - \tilde{\sigma} \cos\left(\frac{\Omega_2}{\omega} \tau + \psi\right) \right) \right) \end{cases} \quad (11)$$

式(11)中 $\Omega' = \Omega / \omega$, $\varepsilon \tilde{\alpha} = \alpha$, $\varepsilon \tilde{\beta} = \beta$, $\varepsilon \tilde{A} = A$, $\varepsilon \tilde{\sigma} = v_0^2 \sigma / \omega^2$ 。相应的汉密尔顿函数为

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{k}{4}(z - z_1)(z - z_2)z^2 \quad (12)$$

根据文献[9], 方程(11)的同宿轨道由式(13)给出。

$$\left\{ \begin{aligned} z^* &= \frac{4z_1z_2 \exp\left[(\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}}\right]}{-(z_1 - z_2)^2 - \exp\left[2(\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}}\right] + 2(z_1 + z_2) \exp\left[(\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}}\right]} \\ v^* &= \frac{-4z_1z_2 \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}} \exp\left[(\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}}\right] \left[(z_1 - z_2)^2 - \exp\left\{2(\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}}\right\}\right]}{\left\{ -(z_1 - z_2)^2 - \exp\left[2(\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}}\right] + 2(z_1 + z_2) \exp\left[(\tau - \tau_0) \sqrt{\frac{-kz_1z_2}{2}}\right] \right\}^2} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

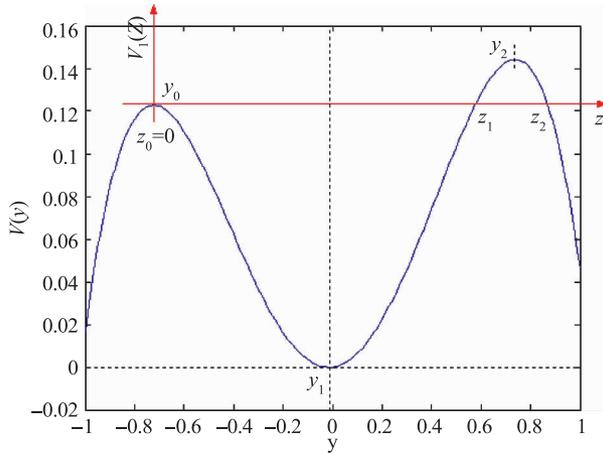


图2 外部势函数 $V(y)$ 和重整化势函数 $V_1(z)$

$$(y_0 = -0.7228, y_1 = -0.0147,$$

$$y_2 = 0.7375, z_1 = 1.298, z_2 = 1.593)$$

下面我们计算系统(11)的 Melnikov 函数。令

$$t_0 = t_{01} + t_{02}, \text{ 其中 } t_{01} = -\ln\left[\frac{\sqrt{2}(z_2 - z_1)}{\sqrt{-kz_1z_2}}\right], \text{ 那么系}$$

统(8)的 Melnikov 函数为

$$M(t_{02}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(t - t_{01}) [-\tilde{\alpha}v^*(t - t_{01}) - \tilde{\beta}v^{*3}(t - t_{01}) + \tilde{A}\Omega^2 \sin(\Omega'(t + t_{02})) - \tilde{\sigma} \cos[\Omega_2(t + t_{02}) + \psi]] dt = I + Z(t_{02}) \quad (14)$$

式(14)中 I 是 $M(t_{02})$ 的均值,且 $Z(t_{02})$ 是一个随机过程。

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \{v^*(t - t_{01}) [-\tilde{\alpha}v^*(t - t_{01}) - \tilde{\beta}v^{*3}(t - t_{01})] + \tilde{A}\Omega^2 \sin[\Omega(t + t_{02})]\} dt \quad (15)$$

$$Z(t_{02}) = -\frac{\tilde{\sigma}}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(t - t_{01}) \cos[\Omega_2(t + t_{02}) + \psi] dt \quad (16)$$

根据均方准则: $I^2 = \sigma_{z(t_{02})}^2$, 我们可以得到临界

幅值:

$$A_c = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha v^{*2}(t - t_{01}) + \beta v^{*4}(t - t_{01})] dt - \frac{v_0^2 \sigma}{\omega^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |v^*(\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega} \right\} \times [\Omega'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(t - t_{01}) \sin(\Omega't) dt]^{-1} \quad (17)$$

式(17)中 $S_\xi(\omega)$ 是有界噪声的功率谱。

根据文献[9,10],参数值取为: $m = 240 \text{ kg}, k_1 = 160\,000 \text{ N/m}, k_2 = -300\,000 \text{ N/m}^3, c_1 = -250 \text{ N} \cdot \text{s/m}, c_2 = 25 \text{ N} \cdot \text{s}^3/\text{m}^3, \lambda = 3.34 \text{ m}$ 。为了得到强度参数 δ 与临界幅值 A_c 之间的关系(图3),我们取参数值为: $\Omega_2 = 35, \sigma = 0.5, \Omega = 20.6559$ 。

3 数值模拟

3.1 最大 Lyapunov 指数

最大 Lyapunov 指数反映了非线性系统相空间中的两个相邻轨道平均指数收敛速率。它常用来描述非线性系统是否作混沌运动。一个系统的最大 Lyapunov 指数是正的,那么它就是混沌的。

我们利用 Wolf 算法来计算系统(8)的最大 Lyapunov 指数。我们取参数值为: $m = 240 \text{ kg}, k_1 = 160\,000 \text{ N/m}, k_2 = -300\,000 \text{ N/m}^3, c_1 = -250 \text{ N} \cdot \text{s/m}, c_2 = 25 \text{ N} \cdot \text{s}^3/\text{m}^3, \Omega_2 = 35, \sigma = 0.5, \Omega = 20.6559$ 。对于不同的强度参数 δ ,临界幅值 A_c 与最大 Lyapunov 指数 λ 之间的关系如图4所示。从图4我们可以看到,当 δ 很小时,随着临界幅值 A_c 的增大,系统式(8)的最大 Lyapunov 指数从负的变成正的,即系统式(8)

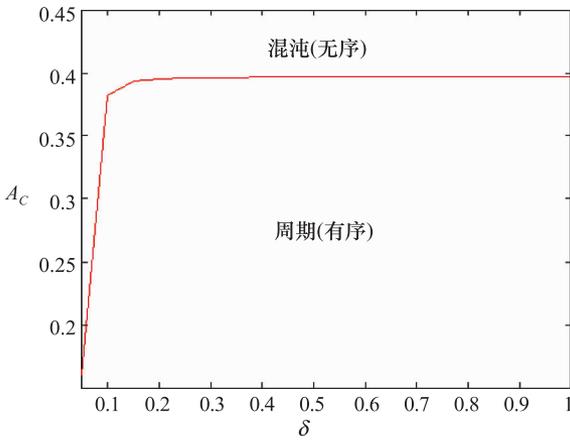


图3 δ 与临界幅值 A_c 的关系

由周期运动变为混沌运动。但是当 δ 变得大一些时,最大 Lyapunov 指数变化得很剧烈,这样就产生了很多周期窗口。

3.2 庞加莱映射

我们利用龙格-库塔算法来模拟系统式(8)的庞加莱映射。庞加莱映射的定义如下式。

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma, \Sigma = \{(y(t), v(t)) \mid t = 0, 2\pi/\Omega_2, 4\pi/\Omega_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

我们选取参数组合为: $\delta = 0.05, A = 0.1, 0.2$; $\delta = 0.5, A = 0.31, 0.4$ 。模拟结果如图 5。从图 5 我们可以看到:模拟得到的庞加莱映射与图 3 中所得到的结果是一致的。图 5(1)和图 5(2)与图 4(a)所得到的最大 Lyapunov 指数也是一致的。

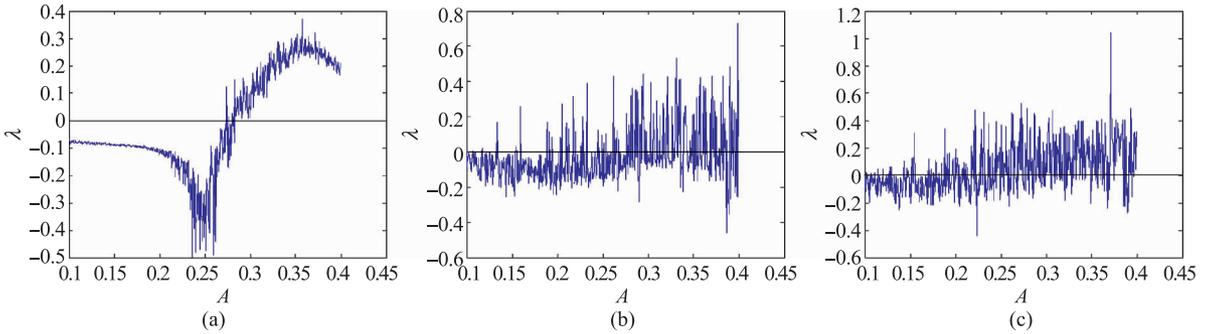
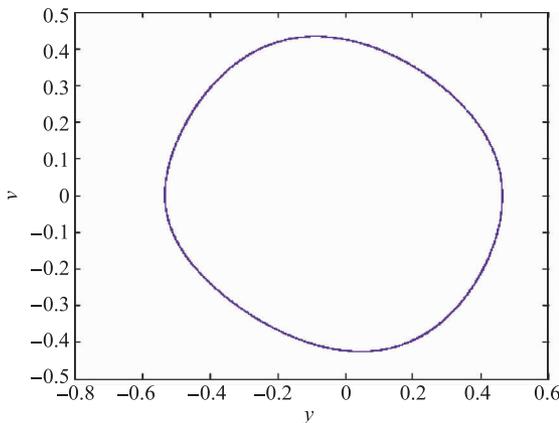
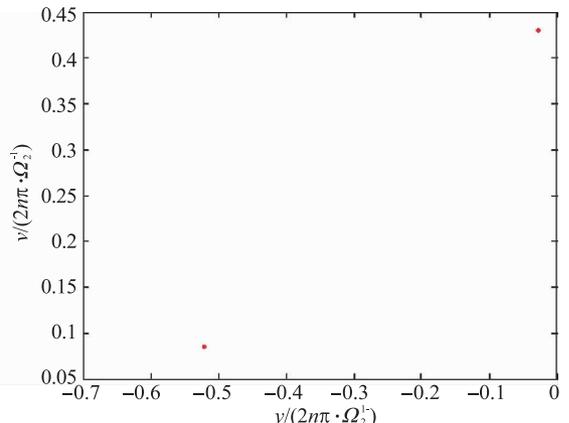


图4 幅值 A 和最大 Lyapunov 指数 λ 之间的关系

(a) $\delta = 0.05$, (b) $\delta = 0.5$, (c) $\delta > 0.05$



(1a) 相图($\delta=0.05, A=0.1$)



(1b) 庞加莱映射($\delta=0.05, A=0.1$)

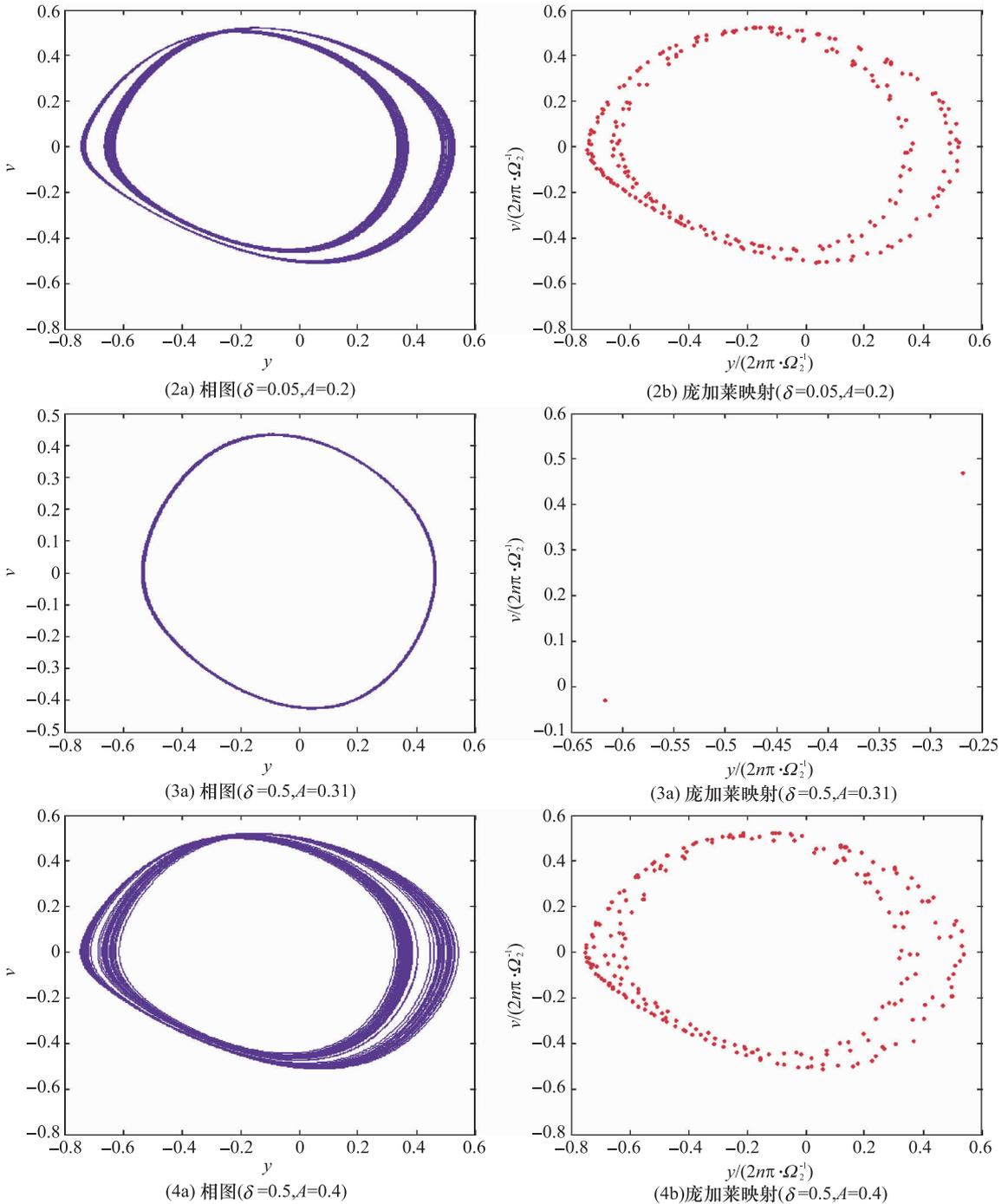


图5 不同参数值下系统(8)的相图和庞加莱映射

4 结论

本文主要利用随机 Melnikov 方法研究了在有

界噪声与谐和激励下四分之一车模型的混沌运动。理论上,通过解析求得系统(8)的随机 Melnikov 函数而得到系统(8)产生 Smale 马蹄意义下的混沌的必要条件。数值上,利用两种数值模拟方法来进一步验证所得到的结果:最大 Lyapunov 指数法和庞

加莱映射法。这两种方法都说明了第三部分所得到的结果是正确的,且表明:临界幅值随着强度参数的增大而增大,但当强度参数增大到一定值时,临界幅值近似保持不变。

参 考 文 献

- 1 Yahaya S, Johari O, Ghanib R. A class of proportional-integral sliding mode control with application to active suspension system. *Systems Control Letters*, 2004; 51:217—223
- 2 Priyandoko G, Mailah M, Jamaluddin H. Vehicle active suspension system using skyhook adaptive neuro-active force control. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009; 23:855—868
- 3 Rao M, Prahlad V. A tunable fuzzy logic controller for vehicle-active suspension systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997; 85:11—21
- 4 Litak G, Borowiec M, Ali M, *et al.* Pulsive feedback control of a quarter car model forced by a road profile. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007;33:1672—1676
- 5 GopalaRao L, Narayanan S. Sky-hook control of nonlinear quarter car model traversing rough road matching performance of LQR control. *Journal of Sound and Vibration*, 2009;323:515—529
- 6 Lauwers C, Swevers J, Sas P. Robust linear control of an active suspension on a quarter car test-rig. *Control Engineering Practice*, 2005; 13:577—586
- 7 Narayanan S, Senthil S. Stochastic optimal active control of a 2-dof quarter car model with nonlinear passive suspension elements. *Journal of Sound and Vibration*, 1998; 211(3):495—506
- 8 Gundogdu O. Optimal seat and suspension design for a quarter-car with driver model using genetic algorithms. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 2007; 37:327—332
- 9 戴 君. Stochastic dynamic analysis based on the quarter-car model with stochastic structural parameters. *振动与冲击*, 2010; 29(6): 211—215
- 10 Wagner U. On non-linear stochastic dynamics of quarter car models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004; 39:753—765
- 11 Yoshimura T, Kume A, Kurimoto M, *et al.* Construction of an active suspension system of a quarter car model using the concept of sliding mode control. *Journal of Sound and Vibration*, 2001; 239(2):187—199
- 12 狄根虎,许 勇,徐 伟,等. Chaos for a class of complex epidemiological models. *物理学报*,2011;60:1—5
- 13 Litak G, Borowiec M, Friswell M, *et al.* Chaotic response of a quarter car model forced by a road profile with a stochastic component. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009; 39:2448—2456
- 14 Litak G, Borowiec M, Friswell M, *et al.* Chaotic vibration of a quarter-car model excited by the road surface profile. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008; 13: 1373—1383
- 15 Naik R, Singru P. Resonance stability and chaotic vibration of a quarter-car vehicle model with time-delay feedback. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011; 16: 3397—3410
- 16 Naik R, Singru P. Establishing the limiting conditions of operation of magneto-rheological fluid dampers in vehicle suspension systems. *Mechanics Research Communications*, 2009; 36:957—962

Melnikov Chaos in Quarter-car Model Subjected to Combined Bounded Noise and Harmonic Excitation

WANG Zhen-pei, XU Wei

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, P. R. China)

[Abstract] The dynamic behavior of quarter-car model subjected to combined bounded noise and harmonic excitation is investigated. Firstly, concrete expression of quarter-car model subjected to combined bounded noise and harmonic excitations is given. Secondly, the random Melnikov method is applied to establish the necessary conditions of existence of chaotic motion, the results implies that the critical amplitude increases as the intensity parameter increases and remain the same when the intensity parameter increases to a certain value. Finally, the conclusion is verified by simulating the largest Lyapunov exponents and the Poincare map numerically.

[Key words] bounded noise random Melnikov method chaotic motion quarter-car model