

数学

膨胀波诱导的层流边界层方程的近似解析解

徐云滨¹ 郑连存²

(榆林学院数学与应用数学系¹, 榆林 719000; 北京科技大学数力系², 北京 100083)

摘要 研究了由膨胀波诱导的边界层问题。利用 Adomian 解析分解方法对不同速度比例参数给出了问题的级数形式的近似解析解和相应的壁摩擦因数近似值, 该近似解析解具有快速收敛性和易于计算性。最后对近似解所推出结果和所得壁摩擦因数与文献中的数值解进行了比较验证, 证实了提出的解析近似方法的准确性和可靠性。

关键词 边界层方程 非线性边值问题 Adomian 分解法

中图法分类号 O175.8; 文献标志码 A

膨胀波边界层流动在非静态波动现象的研究中是非常重要的。对这一问题的研究最突出的具有代表性的工作应该是 Mires^[1] 首先利用积分近似的方法给出了问题的数值解及大量的数值计算结果, 国外学者 Thompson 和 Schlichting^[2,3], 后来, Callegari 和 Nachman^[4] 利用 Crocco 变量变换对边界层方程进行化简得到了问题的解析解并证明了解的存在性和唯一性。我国学者郑连存等也对膨胀波边界层方程进行了研究, 给出了动量和能量边界层方程的相似解及大量数值结果, 相关的工作可见文献[5,6]。在这个领域中, 以往的文献主要集中在讨论边界层问题解的存在性、唯一性或者进行数值计算上, 但对该边界层问题的近似解析解却仍然没有得到很好的解决。为此我们对膨胀波边界层问题的近似解析解进行研究。

1 动量方程

$$g(t)g''(t) + t = 0, \quad 0 \leq \xi < t < 1 \quad (1)$$

$$g(1) = 0, \quad g'(\xi) = 0 \quad (2)$$

这里 ξ 为速度比例参数, 当 $0 \leq \xi < 1$ 时, 方程组(1)–(2)描述的是膨胀波边界层流动^[1–4]。

2 利用 Adomian 拆分法所得的近似解析解结果

下面我们利用 Adomian 拆分法^[7] 来求解动量方程(1)–(2)的近似解析解。

将方程(1)从 ξ 到 t 积分两次可得

$$g(t) = \alpha + L^{-1} \left(\frac{-t}{g(z)} \right).$$

其中 $\alpha = g(\xi)$ (表示壁摩擦因数)。

$$L^{-1} = \int_{\xi}^t \int_{\xi}^t (\cdot) dt dt.$$

表示二次积分算子。令 $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ 可得

2011年7月8日收到

陕西省教育厅中青年科技人才

培养项目(09JK842)资助

第一作者简介:徐云滨(1979—),男,山东临沂人,讲师,硕士,研究方向:微分方程理论。

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \alpha + L^{-1}\left(\frac{-t}{g(t)}\right).$$

这里 A_n 是 Adomian 多项式用来代替非线性项 $\frac{-t}{g(t)}$,

根据 Adomian 拆分法具有下面的迭代关系:

$$g_0 = \alpha, g_1 = L^{-1}(A_0), g_2 = L^{-1}(A_1), \dots, g_{n+1} = L^{-1}(A_n) \quad (3)$$

我们将式(1)一式(2)表示为四阶近似,更高阶的近似可用类似的方法得出。下面我们就计算出该问题的 Adomian 多项式:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = -\frac{1}{\alpha}t \\ A_1 = \frac{1}{\alpha^2}tg_1 \\ A_2 = -\frac{1}{\alpha^3}tg_1^2 + \frac{1}{\alpha^2}tg_2 \\ A_3 = \frac{1}{\alpha^4}tg_1^3 - \frac{2}{\alpha^3}tg_1g_2 + \frac{1}{\alpha^2}tg_3 \end{array} \right. \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)能够得到下面的结果。

$$g_0 = \alpha, g_1 = -\frac{1}{6\alpha}(t^3 - \xi^3) + \frac{1}{2\alpha}\xi^2(t - \xi),$$

$$g_2 = -\frac{1}{180\alpha^3}(t^6 - \xi^6) + \frac{1}{24\alpha^3}\xi^2(t^4 - \xi^4) -$$

$$\frac{1}{18\alpha^3}\xi^3(t^3 - \xi^3) + \frac{1}{30\alpha^3}\xi^5(t - \xi),$$

$$g_3 = -\frac{1}{2160\alpha^5}(t^9 - \xi^9) + \frac{5}{1008\alpha^5}\xi^2(t^7 - \xi^7) -$$

$$\frac{1}{180\alpha^5}\xi^3(t^6 - \xi^6) + \frac{1}{80\alpha^5}\xi^4(t^5 - \xi^5) +$$

$$\frac{11}{360\alpha^5}\xi^5(t^4 - \xi^4) - \frac{1}{48\alpha^5}\xi^6(t^3 - \xi^3) +$$

$$\frac{1}{180\alpha^5}\xi^8(t - \xi),$$

$$g_4 = -\frac{1}{19008\alpha^7}(t^{12} - \xi^{12}) + \frac{37}{50400\alpha^7}\xi^2(t^{10} - \xi^{10}) -$$

$$\frac{1}{1296\alpha^7}\xi^3(t^9 - \xi^9) - \frac{43}{13440\alpha^7}\xi^4(t^8 - \xi^8) +$$

$$\frac{1}{144\alpha^7}\xi^5(t^7 - \xi^7) + \frac{1}{4320\alpha^7}\xi^6(t^6 - \xi^6) -$$

$$\frac{17}{1200\alpha^7}\xi^7(t^5 - \xi^5) + \frac{5}{288\alpha^7}\xi^8(t^4 - \xi^4) -$$

$$\frac{121}{15120\alpha^7}\xi^9(t^3 - \xi^3) + \frac{17}{13860\alpha^7}\xi^{11}(t - \xi)。$$

由上式我们可得到方程式(1)一式(2)的四阶近似解:

$$g(t) = g_0(t) + g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + g_4(t) \quad (5)$$

我们所关心的是利用条件式(2)求出 α (即壁摩擦因数)的值。实际上在式(5)中只要我们给速度比例参数一个确定的值,就能求出相应的壁摩擦因数 α 的值。另一方面,在文献[6] 中作者应用打靶法计算出了一些与速度比例参数相应的壁摩擦因数 α 的数值结果。为了验证 Adomian 近似解的可靠性和有效性,我们记文献[6] 中的壁摩擦因数 α 的数值结果为 α_{num} , 由 Adomian 近似解得到的壁摩擦因数 α 值记为 α_{adomian} 。文献[6] 中壁摩擦因数的数值结果和由本文 Adomian 近似解得到的结果对比如表 1 所示。

表 1 壁摩擦因数的数值结果和 adomian 近似解结果对比

ξ	α_{adomian}	α_{num}
$\xi = 0.0$	0.460 6	0.468 3
$\xi = 0.2$	0.434 7	0.442 1
$\xi = 0.4$	0.368 2	0.374 3
$\xi = 0.6$	0.270 3	0.274 7
$\xi = 0.8$	0.146 5	0.148 9
$\xi = 0.9$	0.075 8	0.077 2

对任意一个给定的速度比例参数 ξ ,由方程(5)和相应的壁摩擦因数我们很容易得到无量纲剪切应力分布,如图 1 所示。由图 1 可以看出,伴随着速度比例参数 ξ 的增大,壁摩擦因数 α 的值是单调递减的,即壁摩擦应力是速度比例参数的减函数。对于每一确定的 ξ 值,在定义域 $[\xi, 1]$ 内,无量纲剪切应力总是无量纲切向速度的减函数。当 $\xi = 0$ 时即为经典的布拉修斯问题的解。不难看出,所有这些结果和理论分析得到的结果完全吻合。以上这些结果从不同角度证明了所得的 Adomian 近似解的可靠性和有效性。

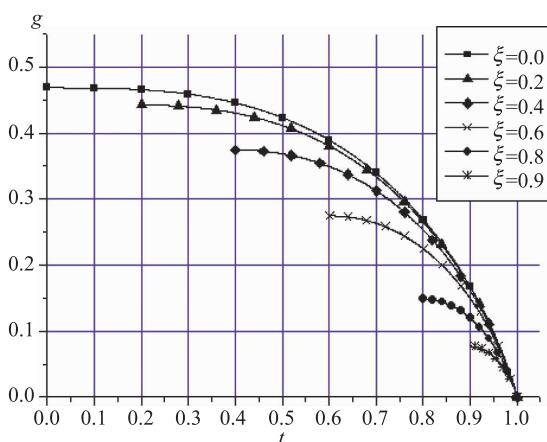


图1 ξ 从 0.0 到 0.9 时无量纲剪切应力的分布

3 结 论

通过引入 Adomian 分解方法得到了该边值问题的一个易于计算和快速收敛级数形式的解,从而得到该问题的近似解析解,所得的近似解析解能够成功应用于计算壁摩擦因数的近似值和提供无量纲

剪切应力分布图,将所得结果与文献中的数值解结果进行了比较,结果验证了得到的 Adomian 近似解有相当高的精度。

参 考 文 献

- 1 Mires H. Boundary layer behind a shock or thin expansion wave moving into a stationary fluid. TH-3712, NACA, 1956
- 2 Thompson P A. Compressible-fluid dynamics. New York: McGraw-Hill, 1972
- 3 Shiliching H, Gesten K. Boundary layer theory. 8th revised and enlarged edition(English), Springer, 2000
- 4 Callegari A J, Nachman A. Some singular, non-linear differential equations arising in boundary layer theory. J Math Anal Appl, 1978; 64: 96—105
- 5 Zheng Liancun, Zhang Xinxin, He Jicheng. Momentum and heat transfer in laminar boundary layer behind shock wave. Journal of Thermal Science, 2002; 11(3):255—258
- 6 Zheng Liancun, Chen Xuehui, Zhang Xinxin. Analytical approximants for a boundary layer flow on a stretching moving surface with a power velocity. Int J Appl Mech Eng, 2004; 9:795—802
- 7 Adomian G. Nonlinear stochastic operator equations. Academic Press, 1986

Analytical Approximate Solutions of Expansion Wave Boundary Layer

XU Xun-bin¹, ZHENG Lian-cun²

(Department of Mathematics and Applied Mathematics, Yulin University¹, Yulin 719000, P. R. China;

Department of Mathematics and Mechanics, University of Science and Technology Beijing², Beijing 100083, P. R. China)

[Abstract] A theoretical analysis for expansion wave boundary layer was presented. The Adomian analytical decomposition technique was presented and an approximate analytical solution was obtained. The approximate analytical solution can be represented in terms of a rapid convergent power series with elegantly computable terms. Analytical Approximate Solutions of boundary layer equation and approximate value of skin friction coefficient for velocity ratio parameter ξ are presented. The reliability and efficiency of the approximate solution were verified using numerical solutions.

[Key words] boundary layer equation nonlinear boundary value problem Adomian decomposition