第10卷 第27期 2010年9月 科 学 技 术 与 工 程 Vol. 10 No. 27 Sep. 2010
1671—1815(2010)27-6709-03 Science Technology and Engineering

立方图中的路因子和圈因子

杜彩凤
(中国石油大学(华东),东营 257061)

摘 要 给定连通图集合 Φ,对图 G 的生成子图 F,如果 F 的每个分支都同构于集合 Φ 的一个元素,则 F 被称为 G 的 Φ-因子。最近 Kawarabayashi 等 证明了:2-连通立方图有一个 $\{C_n \mid n \geqslant 4\}$-因子和 $\{p_n \mid n \geqslant 6\}$-因子,其中 C_n 表示阶为 n 的圈,P_n 表示阶为 n 的路。Kano 等给出了每一个阶至少为 8 的立方偶图有 $\{C_n \mid n \geqslant 6\}$-因子和 $\{p_n \mid n \geqslant 8\}$-因子的结论,并且提出猜想:阶至少为 6 的 3-连通立方图有 $\{C_n \mid n \geqslant 5\}$-因子和 $\{p_n \mid n \geqslant 7\}$-因子。现给出这个猜想的证明。

关键词 路因子 圈因子 立方图 正则图
中图法分类号 O157.5; **文献标志码** A

路因子和圈因子问题是图的因子理论中非常重要的部分,也是图的哈密顿圈理论的推广和延伸。它是图论中非常有趣的一类问题,也是国内外研究的热门课题。其理论研究日益成熟和完善,而且在计算机科学、通信网络设计、分配问题及其他实际问题中具有广泛的应用,如计算机网络中的文件传输问题、时间表问题等等都涉及到图的路因子和圈因子。

现考虑没有自环和重边的简单图。如果图 G 中每一对顶点 u,v 都有一条(u , v)路,则称图 G 是连通的。G 是 k-连通的充要条件是 G 的任意两个顶点至少由 k 条内部不相交的路所连通。

给定一个连通图集合 Φ,如果图 G 的一个生成子图 F 的每个部分都同构于集合 Φ 的一个元素,子图 F 被称为 G 的 Φ-因子。如:G 的一个 1-因子是 G 的一个 1-正则支撑子图,通常称 1-因子为完美对集或完美匹配。显然 G 的一个 1-因子是覆盖 G 的所有顶点的一个边集合。G 的一个 2-因子是 G 的一个 2-正则支撑子图,易见 2-因子的每一个连通分支为一个圈。

图的一个路因子就是指每一个分支都是一条路的一个生成子图。给定正整数 k ,$\{p_n \mid n \geqslant k\}$-因子就是指每个分支都至少含 k 个顶点的一个路因子。图的一个圈因子就是指每一个分支都是一个圈的一个生成子图。给定正整数 k ,$\{C_n \mid n \geqslant k\}$-因子就是指每个分支都至少含 k 个顶点的一个圈因子。用 C_n 表示阶为 n 的圈, P_n 表示阶为 n 的路。一个 $\{C_n \mid n \geqslant 3\}$-因子恰好是一个 2-因子,即一个生成 2-正则子图。

如果图的每一个顶点都具有相同的度,则称这个图是正则图。3-正则图被称为立方图。本文考虑立方图中的圈因子和路因子,我们首先给出关于路因子和圈因子的相关结论。

定理 1 Petersen[1] 每一个 2-连通立方图有一个 $\{C_n \mid n \geqslant 3\}$-因子。

即每一个 2-连通立方图有一个完美匹配。

Kaneko 等[2]给出了图有 $\{P_n \mid n \geqslant 3\}$-因子的充分必要条件,下面定理是其结论的一个推论。

定理 2 每一个连通立方图有一个 $\{P_n \mid n \geqslant 3\}$-因子。

Kawarabayashi 等人在文献[3]中证明了下面的定理。

定理 3 (i)每一个 2-连通立方图有一个 $\{C_n \mid n \geqslant 4\}$-因子。(ii)每一个阶至少为 6 的 2-连通立方图有一个 $\{P_n \mid n \geqslant 6\}$-因子。

Kano 等人在文献[4]中讨论了立方偶图的因子

2010年7月19日收到
作者简介:杜彩凤(1979—),山东人,博士,研究方向:图论,随机图。

性质,证明了如下结论。

定理 4 (i)每一个连通立方偶图有一个 $\{C_n \mid n \geqslant 6\}$- 因子。(ii)每一个阶至少为 8 的连通立方偶图有一个 $\{P_n \mid n \geqslant 8\}$- 因子。

现将证明由 Kano 等在文献[4]中中提出的如下猜想。

定理 5 每一个阶至少为 6 的 3-连通立方图有一个 $\{C_n \mid n \geqslant 5\}$- 因子。

下面的推论由定理 4 容易得出。

推论 1 每一个阶至少为 6 的 3-连通立方图有一个 $\{P_n \mid n \geqslant 7\}$- 因子。

1 定理 5 的证明

把 G 的阶记为 $|G|$,它等于 $|V(G)|$ 。

证明 令 G 是一个 3-连通立方图。使用关于阶 $|G|$ 的归纳法证明定理 5。存在两个阶为 6 的三连通立方图(见图 1)。显然,这两个图都有 $\{C_n \mid n \geqslant 5\}$- 因子。由此,假设 $|G| \geqslant 8$ 的情况成立。由于 G 是 3-连通的,所以根据定理 2, G 有 $\{C_n \mid n \geqslant 4\}$- 因子 F 。

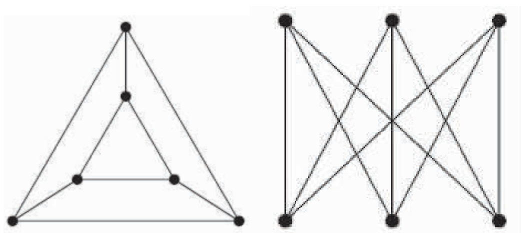

图 1 阶为 6 的 3 连通立方图

不妨设 F 的某个分支 D 同构于 C_4 ,否则, F 就是所需要的 $\{C_n \mid n \geqslant 5\}$- 因子。

令 $V(D) = \{a,b,c,d\}$,因为图 G 是 3-连通的,所以 ac 和 bd 都不是 G 的边。假设 ar,bs,ct,du 是 G-$E(D)$ 入射于 $V(D)$ 的边(见图 2)。

因为 G-$E(F)$ 是 G 的 1-因子, ar,bs,ct,du 是独立边的集合,所以 r,s,t,u 都是 G 的不同顶点。令 H 是从 G 中得到的图,通过去掉四个顶点 a,b,c,d 和它们的入射边,再增加两个新顶点 v,w 以及五条新边 rv,tv,vw,uw,sw (见图 2)。

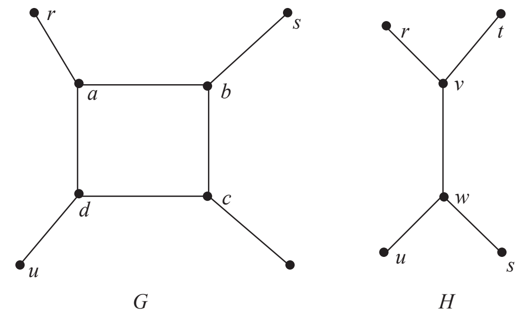

图 2 立方图 G 和 H

现在,证明 H 是 3-连通立方图。因为 G 是 3-连通图,对于 $V(G)$ 的任意两个不相交的顶点子集 A 和 B ,从 A 到 B 至少存在三条不同的路。而且经过 D 的不同路至多有两条。要证明 H 是 3-连通图,只需证明从 A 到 B 仅有两条路通过 D 的情况,因为否则的话 H 显然是 3-连通图。对于这种情况,考虑在 G 中从 A 到 B 的三条路的两种子情况。

情况 1 G 中的三条路是 $AB,AraduB,AsbctB$,我们可以找到 H 中从 A 到 B 的三条路是 $AB,ArvtB,AswuB$ (见图 3)。

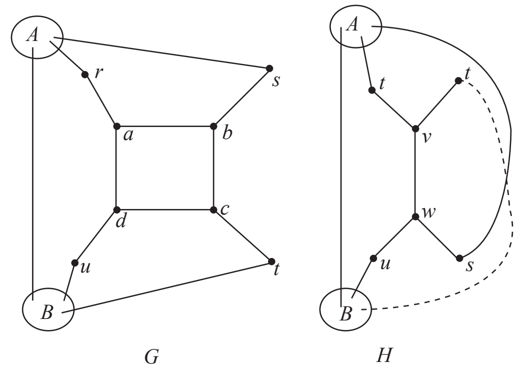

图 3 立方图 G 和 H 中 A 到 B 的路

情况 2 G 中的三条路是 $AB,ArabsB,AudctB$,我们可以找到 H 中从 A 到 B 的三条路是 $AB,ArvtB,AuwsB$ (见图 4)。所以 H 也是 3-连通图。

那么 H 是 3-连通立方图,并且 $|H| = |G| - 2$ 。因此,根据归纳法, H 有 $\{C_n \mid n \geqslant 5\}$- 因子 F_H 。利用文献[4]中的方法可以从 F_H 得到所需要的 G 的 $\{C_n \mid n \geqslant 5\}$- 因子。因此定理 5 得证。

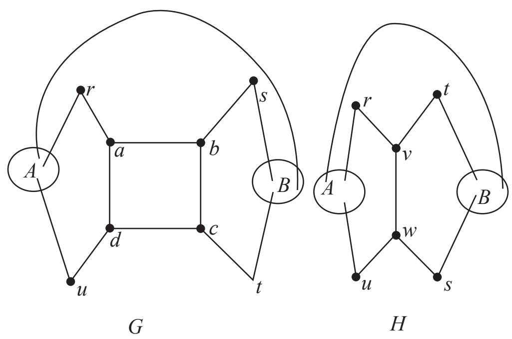

图4　立方图 G 和 H 中 A 到 B 的路

推论 1　可以再从下面的引理 1 和定理 5 容易地得到。

引理 1[4]　令整数 $k \geqslant 3$ 。对于一个阶至少为 $k+2$ 的 2-连通立体图 G ,如果它有 $\{C_n \mid n \geqslant k\}$ -因子,那么 G 有一个 $\{P_n \mid n \geqslant k+2\}$ -因子。

参 考 文 献

1　Petersen J. Die theorie der regulagaren graphen. Acta Math, 1891; 15:193—220

2　Kaneko A. A necessary and sufficient condition for the existence of a path factor every component of which is a path of length at least two. J Combin Theory Ser B, 2003;88 :195—218

3　Kawarabayashi K, Matsuda H, Oda Y, *et al*. Path factors in cubic. Graphs J Graph Theory, 2002;39:188—193

4　Kano M, Lee Changwoo, Suzuki K. Path factors and cycle factors of cubic bipartite graphs. The Disscussiones Mathematicae Graph Theory, 2008;28:551—556

Path and Cycle Factors of Cubic Graphs

DU Cai-feng

(China University of Petroleum, Dongying 257061, P. R. China)

[**Abstract**]　For a set Φ of connected graphs, a spanning subgraph F of a graph is called an Φ-factor if every component of F is isomorphic to a member of Φ. It was recently shown by Kawarabayashi *et al*. that every 2-connected cubic graph has a $\{C_n \mid n \geqslant 4\}$ - factor and $\{p_n \mid n \geqslant 6\}$ - factor, where C_n denote the cycle of order n and P_n denote the path of order n. Kano *et al*. show that every connected cubic bipartite graph has a $\{C_n \mid n \geqslant 6\}$ - factor and $\{p_n \mid n \geqslant 8\}$ - factor if its order is at least 8. And they have conjectured that every 3-connected cubic graph of order at least six has a $\{C_n \mid n \geqslant 5\}$ - factor. A proof of this conjecture is given.

[**Key words**]　path factor　　cycle factor　　cubic graph　　regular graph

(上接第 6708 页)

On Fibonacci Counting Function and Its Second Power Mean Value

DUAN Wei-guo

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teacher's University, Weinan 714000, P. R. China)

[**Abstract**]　Fibonacci of new counting function is discussed. The calculation problem of the second power mean of the Fibonacci sequence is studied and its formula is extend. Using the method of recursion summarization to study the calculation of the second power mean of the Fibonacci sequence, and its a precise formula is given.

[**Key words**]　Fibonacci sequence　　counting function　　mean value