2020 年 第 20 卷 第 35 期
2020, 20(35): 14543 - 05

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

ISSN 1671—1815
CN 11—4688/T

引用格式:鲍乐平, 李腾辉. 具有连续分布时滞的切换分布参数系统反馈控制[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(35): 14543-14547
Bao Leping, Li Tenghui. Feedback control for switched distributed parameter systems with continuous time delay[J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(35): 14543-14547

自动化技术、计算机技术

具有连续分布时滞的切换分布参数系统反馈控制

鲍乐平[1], 李腾辉[2]
(1. 太原工业学院自动化系, 太原 030008; 2. 太原科技大学电子信息工程学院, 太原 030024)

摘　要　针对一类具有连续分布时滞的切换分布参数系统的反馈控制问题进行了研究。通过构造切换 Lyapunov-Krasovskii 函数,利用 Poincare 不等式、Jensen 不等式,采用线性矩阵不等式(linear matrix inequality,LMI)方法,得到了该闭环系统渐近稳定的条件并设计了状态反馈控制器以及切换规则。和已有具有连续分布时滞的分布参数系统的结果比较,充分考虑了该类具有连续分布时滞的分布参数切换系统中 Laplace 算子系数对系统的影响。研究结果是已有具有连续分布时滞的分布参数系统反馈控制结论的改进和推广。最后,给出了数值例子说明设计方法的有效性和优越性。

关键词　切换系统; 分布参数系统; 分布时滞; 反馈控制
中图法分类号　TP273;　　　**文献标志码**　A

Feedback Control for Switched Distributed Parameter Systems with Continuous Time Delay

BAO Le-ping[1], LI Teng-hui[2]
(1. Department of Automation, Taiyuan Institute of Technology, Taiyuan 030008, China;
2. School of Electronic Information Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

[**Abstract**]　The feedback control for switched distributed parameter system with continuous distributed time-delay was considered. By constructing switched Lyapunov-Krasovskii functions, an asymptotical stability's condition of the closed-loop system was given. It uses methods as Poincare inequality, Jensen inequality and linear matrix inequalities (LMI) method. Furthermore, the state feedback controller and the switching law were designed. Compared with the result of distributed parameter system with continuous distributed time-delay, the research considered the influence of the Laplacian coefficient. And the obtained result could be regarded as the extension of control for distributed parameter system with continuous distributed time-delay. Finally, numerical examples were given to illustrate the validity and advantages of the results.

[**Key words**]　switched system; distributed parameter system; distributed time-delay; feedback control

切换系统是混杂系统的一种重要类型。它包括一组子系统和描述子系统之间如何切换的切换规则,整个切换系统受控于切换规则[1]。由于在工程实践中的应用,如机器人控制[2]、电力系统控制[3]等,切换系统在近二十多年得到了广泛的研究[4-7]。

按照建模方法的不同,切换系统分为集中参数切换系统和分布参数切换系统(或者称切换分布参数系统)。有关切换分布参数系统的研究一直是国际控制理论研究领域的难点。近十年来,切换分布参数切换系统受到了广泛关注[8-12]。此外,时滞广泛存在于工业系统中,是系统产生不稳定的一个重要因素。近些年来,有关时滞系统的研究有大量的报道[13-19]。

文献[13]研究了时滞切换系统的稳定性问题,但考虑的切换系统不是分布参数系统;文献[12]研究了切换分布参数系统的 H_∞ 控制问题,但没有考虑具有分布时滞的情形。文献[14-15]利用线性矩阵不等式(linear matrix inequality,LMI)方法研究了时滞分布参数系统稳定性和镇定性问题;文献[16]利用 LMI 方法研究时滞分布参数系统的 H_∞ 控制问题;文献[17]对具有分布时滞的不确定中立型分布参数系统研究了滑模控制,设计了滑模控制器;文

收稿日期: 2019-12-15;　修订日期: 2020-06-11
基金项目: 国家留学基金(201808140223);国家自然科学基金(11661020)
第一作者: 鲍乐平(1968—),女,汉族,湖北武汉人,博士,副教授。研究方向:分布参数切换系统、机器人控制系统和非线性系统理论。E-mail: jsll68@126.com。

献[18]对具有变时滞和连续分布时滞的分布参数系统进行了研究,设计了使得闭环系统稳定的状态反馈控制器,但没有考虑切换。从已有的相关文献来看,对于具有连续分布时滞的切换分布参数系统控制问题研究还未见报道。

在上述研究基础上,针对一类具有连续时滞的切换分布参数系统,研究其闭环系统的渐进稳定性。通过构造适当的切换 Lyapunov-Krasovskii 函数,结合 Poincare 不等式,Jensen 不等式和 LMI,给出了闭环系统渐近稳定的充分条件。所设计的切换规则和控制器能保证闭环系统具有渐进稳定性。和有关分布参数[18]的研究结果相比,考虑了分布参数系统中的 Laplace 算子 $\left(\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)$ 系数对系统的影响,且将文献[18]的耗散系数 D 为大于 0 的常数推广至 D 为大于 0 的矩阵。本文结果是已有具有连续分布时滞的分布参数系统反馈控制相关结论的改进和推广。所设计的控制器具有一定的优越性,并通过仿真的例子进行了验证。

1 问题描述

考虑具有连续分布时滞的切换分布参数系统为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{W}(x,t)}{\partial t} = {} & \boldsymbol{D}_i \Delta \boldsymbol{W}(x,t) + \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{W}(x,t) + \\ & \boldsymbol{A}_{d1i} \boldsymbol{W}(x, t-\gamma_1) + \\ & \boldsymbol{A}_{d2i} \int_{t-\gamma_2}^{t} \boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{U}(x,t)\end{aligned} \tag{1}$$

其状态反馈控制为

$$\boldsymbol{U}(x,t) = \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{W}(x,t) \tag{2}$$

由式(1)、式(2)得到闭环系统为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{W}(x,t)}{\partial t} = {} & \boldsymbol{D}_i \Delta \boldsymbol{W}(x,t) + \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{W}(x,t) + \\ & \boldsymbol{A}_{d1i} \boldsymbol{W}(x, t-\gamma_1) + \\ & \boldsymbol{A}_{d2i} \int_{t-\gamma_2}^{t} \boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{W}(x,t)\end{aligned} \tag{3}$$

式中:$i \in \Theta = \{1,2,\cdots,N\}$,表示该切换系统具有 N 个子系统;$(x,t) \in \Omega \times (0, +\infty)$,$x$ 表示坐标,t 表示时间,$\Omega = \{x, \|x\| \leqslant \sqrt{n}\} \subset R^k$ 表示具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_N$,$\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing(i,j \in \Theta)$;$\boldsymbol{W}(x,t) \in R^n$ 表示系统的状态向量;$\boldsymbol{U}(x,t) \in R^s$ 表示控制;$\Delta = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 为 Laplace 算子;$\boldsymbol{D}_i$ 为耗散系数,$\boldsymbol{D}_i > 0(\forall i \in \Theta)$;$\boldsymbol{D}_i$、$\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{B}_i$、$\boldsymbol{A}_{d1i}$,$\boldsymbol{A}_{d2i}(\forall i \in \Theta)$ 为具有适当维数的已知矩阵;$\boldsymbol{K}_i$ 为待定矩阵;时滞 $\gamma_1 > 0$,$\gamma_2 > 0$ 为已知常数,记 $h = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$。

系统边值条件为

$$\boldsymbol{W}(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in \Omega[-h, 0] \tag{4}$$

$$\boldsymbol{W}(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega[-h, 0] \tag{5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}(x,t)}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, (x,t) \in \partial\Omega[-h, +\infty] \tag{6}$$

式中:$\varphi(x,t)$ 为光滑函数;$\boldsymbol{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

研究的目的是设计状态反馈控制器[式(2)]和切换规则,使得闭环切换分布参数系统[式(3)]渐近稳定。

引理 Jensen 不等式[19]:已知向量函数 $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$:$[a, b] \to R^n$,$a < b$。对于任意给定的矩阵 $\boldsymbol{Q} > 0$,有

$$\int_a^b \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(s) \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\omega}(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s \boldsymbol{Q} \int_a^b \boldsymbol{\omega}(s)\mathrm{d}s。$$

2 主要结果

定理 已知具有连续分布时滞的切换分布参数系统[式(1)],其初边值条件为式(4)、式(5)。如果对于任意给定的矩阵 $\boldsymbol{Q}_{1i}$、$\boldsymbol{Q}_{2i} > 0$,存在矩阵 $\boldsymbol{P}_i > 0$,$\boldsymbol{K}_i$,使以下矩阵不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i \boldsymbol{\Gamma}_i < 0 \tag{7}$$

式(7)中:$\delta_i \in \{0,1\}$,$\sum_{i=1}^{N} \delta_i = 1$,$\boldsymbol{\Gamma}_i$ 为

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_i & \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{A}_{d1i} & \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{A}_{d2i} \\ * & -\boldsymbol{Q}_{1i} & 0 \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_{2i} \end{bmatrix} \tag{8}$$

式(8)中:$\boldsymbol{\Psi}_i = -2\boldsymbol{P}_i \boldsymbol{D}_i + \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{K}_i + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{Q}_{1i} + \gamma^2 \boldsymbol{Q}_{2i}$;$\boldsymbol{P}_i$ 为正定矩阵;* 表示对称元素。

切换规则:

$$i = \underset{i \in \Theta}{\arg\min}\, \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t) \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\eta}(x,t) \tag{9}$$

式(9)中:$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t) = \left[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t), \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-\gamma_1), \int_{t-\gamma_2}^{t} \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,s)\mathrm{d}s\right]$,那么,当状态反馈控制[式(2)]作用于系统[式(1)]时,所得闭环系统[式(3)]在切换规则取[式(9)]时是渐进稳定的。

证明 构造切换 Lyapunov-Krasovskii 函数为

$$\begin{aligned}V_i[t, \boldsymbol{W}(x,t)] = {} & \int_\Omega \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t) \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x + \\ & \int_\Omega \int_{t-\gamma_1}^{t} \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,s) \boldsymbol{Q}_{1i} \boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x +\end{aligned}$$

$$\gamma_2\int_\Omega\int_{-\gamma_2}^{0}\int_{t+s}^{t}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,\theta)\,\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{W}(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{10}$$

因为 $\boldsymbol{P}_i$、$\boldsymbol{D}_i$ 为正定矩阵,则 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i$ 为正定矩阵。类似文献[12]推导,根据高斯收敛定理、Poincare 不等式以及边界条件[式(4)~式(6)],可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\Delta\boldsymbol{W}(x,t)+\\&\Delta\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{W}(x,t)]\mathrm{d}x=\\&2\int_\Omega\Delta\boldsymbol{W}(x,t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\,\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)(-2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i)\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{11}$$

对 V_i 沿着闭环系统[式(3)]的状态轨迹关于时间 t 求导,即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_i(t)}{\mathrm{d}t}=&\int_\Omega[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i\Delta\boldsymbol{W}(x,t)+\\&\Delta\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{W}(x,t)]\mathrm{d}x+\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)[\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\\&\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i]\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+\\&2\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d1i}\boldsymbol{W}(x,t-\gamma_1)\mathrm{d}x+\\&2\int_\Omega[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d2i}\int_{\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}x+\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{Q}_{1i}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x-\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-\gamma_1)\boldsymbol{Q}_{1i}\boldsymbol{W}(x,t-\gamma_1)\mathrm{d}x+\\&\gamma_2^2\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x-\\&\gamma_2\int_\Omega\int_{t-\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,s)\,\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{12}$$

将式(11)代入式(12),得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_i(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)(-2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i)\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)[\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\\&\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i]\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+2\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\times\\&\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d1i}\boldsymbol{W}(x,t-\gamma_1)\mathrm{d}x+2\int_\Omega[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,\\&t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d2i}\int_{\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}x+\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\boldsymbol{Q}_{1i}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x-\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-\gamma_1)\boldsymbol{Q}_{1i}\boldsymbol{W}(x,t-\gamma_1)\mathrm{d}x+\\&\gamma_2^2\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x-\\&\gamma_2\int_\Omega\int_{t-\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,s)\,\boldsymbol{Q}_{2i}\boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{13}$$

利用 Jensen 不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_i(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)[-2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\\&\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{Q}_{1i}+\\&\gamma_2^2\boldsymbol{Q}_{2i}]\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+\\&2\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d1i}\boldsymbol{W}(x,t-\gamma_1)\mathrm{d}x+\\&2\int_\Omega[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d2i}\int_{\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}x-\\&\int_\Omega\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-\gamma_1)\boldsymbol{Q}_{1i}\boldsymbol{W}(x,t-\gamma_1)\mathrm{d}x-\\&\int_\Omega[\int_{t-\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,s)\mathrm{d}s]\,\boldsymbol{Q}_{2i}\int_{t-\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{14}$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_i=&-2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\\&\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{Q}_{1i}+\gamma_2^2\boldsymbol{Q}_{2i}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t)=&[\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t),\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,t-\gamma_1),\\&\int_{t-\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(x,s)\mathrm{d}s]\end{aligned}$$

那么有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_i(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant&\int_\Omega\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_i & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d1i} & \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{d2i}\\ * & -\boldsymbol{Q}_{1i} & 0\\ * & * & -\boldsymbol{Q}_{2i}\end{bmatrix}\times\\&\boldsymbol{\eta}(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(x,t)\,\boldsymbol{\Gamma}_i\boldsymbol{\eta}(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{15}$$

当 $\sum_{i=1}^{m}\delta_i\boldsymbol{\Gamma}_i<0,\delta_i\in\{0,1\},\sum_{i=1}^{m}\delta_i=1$ 时,取切换规则[式(9)],则必然存在 $i\in\Omega_i$,使得 $\frac{\mathrm{d}V_i(x,t)}{\mathrm{d}t}<0$。即当 $i\in\Omega_i$ 时,对于每个子系统 i,可得其相应的 $\frac{\mathrm{d}V_i(x,t)}{\mathrm{d}t}<0$。因此,取切换规则[式(9)]时,系统[式(1)]在状态反馈控制律为[式(2)]时,所得闭环系统[式(3)]是渐近稳定的。

对式(7)左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}_i^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$ 和它的转置矩,令

$\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{P}_i^{-1},\boldsymbol{M}_i=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}_i^{-1}$,得

$$\boldsymbol{\Gamma}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_i & \boldsymbol{A}_{d1i} & \boldsymbol{A}_{d2i}\\ * & -\boldsymbol{Q}_{1i} & 0\\ * & * & -\boldsymbol{Q}_{2i}\end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_i & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_4 & 0 & 0 \\ * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_i & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

式(16)中:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_i = -2\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i + \boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i \\ \boldsymbol{\Phi}_4 = (-\boldsymbol{Q}_1 - \gamma_2^2\boldsymbol{Q}_2)^{-1} \end{cases} \tag{17}$$

利用 Schur 补引理,可以得到与式(8)等价的线性矩阵,即

$$\boldsymbol{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i & \boldsymbol{A}_{d1i} & \boldsymbol{A}_{d2i} & \boldsymbol{X}_i & 0 & 0 \\ * & -\boldsymbol{Q}_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \boldsymbol{\Phi}_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{18}$$

定理 2 已知具有连续分布时滞的切换分布参数系统[式(1)],其初边值条件为式(4)、式(5)。如果对于任意给定的矩阵 $\boldsymbol{Q}_{1i}, \boldsymbol{Q}_{2i} > 0$,存在矩阵 $\boldsymbol{X}_i > 0, \boldsymbol{M}_i$,使以下矩阵不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i \boldsymbol{\Pi}_i < 0 \tag{19}$$

式(19)中:$\delta_i \in \{0,1\}$,$\sum_{i=1}^{N}\delta_i = 1$,$\Pi_i$ 由式(18)给出。当状态反馈控制[式(2)]作用于系统[式(1)]时,所得闭环系统[式(3)]在切换规则取式(9)时是渐进稳定的,并且 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{P}_i^{-1}$。

当 $i = 1$ 时,闭环切换分布参数系统[式(3)]退化为系统:

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}(x,t)}{\partial t} = \boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{W}(x,t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}(x,t) + \boldsymbol{A}_{d1}\boldsymbol{W}(x, t-\gamma_1) + \boldsymbol{A}_{d2}\int_{t-\gamma_2}^{t}\boldsymbol{W}(x,s)\mathrm{d}s + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(x,t) \tag{20}$$

即为文献[18]中的系统[式(14)]。由定理 2 容易得到。

推论 1 已知系统[式(20)],其初边值条件为式(4)、式(5)。如果对于任意给定的矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2 > 0$,存在矩阵 $\boldsymbol{X} > 0, \boldsymbol{M}$,使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -2\boldsymbol{PD} + \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{A}_{d1} & \boldsymbol{A}_{d2} & \boldsymbol{X} & 0 & 0 \\ * & -\boldsymbol{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \boldsymbol{\Phi}_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

式(21)中:$\boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_i + \boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i$;$\boldsymbol{\Phi}_4 = (-\boldsymbol{Q}_1 - \gamma_2^2\boldsymbol{Q}_2)^{-1}$。那么,切换闭环系统[式(20)]在控制器[式(2)]作用下是渐近稳定的,并且 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{P}_i^{-1}$。

3 数值例子

例 1 当 $N = 1$ 时,切换系统[式(3)]退化为文献[18]中非切换系统[式(14)]。系统[式(20)]即是文献[18]中系统[式(14)]。取参数 $\boldsymbol{D} = 1.2$,$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{d1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$,$\lambda_1 = 0.1$,$\lambda_2 = 0.05$。

外参数:$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$。

利用 MATLAB 解 LMI(21),得到系统状态反馈增益矩阵为 $\boldsymbol{K} = [-3.670\,4 \quad -1.166\,5; \ -1.234\,4 \quad -4.631\,5]$;利用文献[18]推论 1 的结果得到 $\boldsymbol{K} = [-4.654\,6 \quad -1.373\,8; \quad -1.435\,9 \quad -6.277\,3]$。

通过数据对比可以发现,通过本文结论获得的增益比通过文献[18]结论获得的增益数值小。说明本文通过较小增益的反馈控制能实现系统的渐进稳定,本文设计的控制器优于文献[18]。

例 2 假设闭环系统[式(3)]是具有 2 个子系统的切换系统。已知:$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{d11} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{d12} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{d21} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{d22} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.05$,$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$。

利用 MATLAB 解 LMI[式(10)],得到系统的状态反馈增益矩阵为 $\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} -1.851\,0 & 3.924\,7 \\ 2.294\,8 & 0.331\,8 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.687\,9 & 0.451\,3 \\ 1.416\,3 & 0.939\,5 \end{bmatrix}$。根据定理 2,在切换规则[式(9)]的切换信号下,系统[式(1)]能够由状态反馈控制器[式(2)]实现渐进稳定。

4 结论

通过构造切换 Lyapunov-Krasovskii 函数,结合

Poincare 不等式、Jensen 不等式和 LMI, 设计了具有连续分布时滞的切换分布参数系统状态反馈控制器和切换规则,给出了该类系统渐近可镇定的充分条件。比较已有分布参数系统相关结论,考虑了分布参数系统中 Laplace 算子的系数对系统的影响。所得可以看作是已有分布参数系统相关结论的推广和改进。最后,通过仿真进行了验证。

参 考 文 献

1 Sun Z D, Ge S S. Switched linear systems: control and design[M]. New York: Springer-Verlag, 2004.

2 Jeon D, Tomizuka M. Learning hybrid force and position control of robot manipulators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 9(4): 423-431.

3 Williams S M, Hoft R G. Adaptive frequency domain control of PWM switched power line conditioner[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 1991, 6(4): 665-670.

4 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.

5 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 55-70.

6 Kundu A, Chatterjee D. Stabilizing switching signals for switched systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 882-888.

7 Jiang B, Shen Q K, Shi P. Neural-networked adaptive tracking control for switched nonlinear pure-feedback systems under arbitrary switching[J]. Automatica, 2015, 61(3): 119-125.

8 Amin S, Hante F, Bayen A. Exponential stability of switched linear hyperbolic initial-boundary value problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(2): 291-301.

9 Yang H, Jiang B. On stability of nonlinear and switched parabolic systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(5): 749-756.

10 鲍乐平. 分布参数切换系统稳定性研究[D]. 南京: 东南大学, 2014.
Bao L P. Study on stability of distributed parameter switched systems[D]. Nanjing: Southeast University, 2014.

11 董学平, 温　锐, 刘红亮. 一类时滞分布参数切换系统的鲁棒容错控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 232-236.
Dong Xueping, Wen Rui, Liu Hongliang. Robust fault-tolerant control for a class of distributed parameter switched system with time-delay[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 232-236.

12 鲍乐平, 黄　璞. 时滞分布参数切换系统的 H_∞ 控制[J]. 科学技术与工程, 2019, 19(35): 28-33.
Bao Leping, Huang Pu. H_∞ control for distributed parameter switched systems with delay[J]. Science Technology and Engineering, 2019, 19(35): 28-33.

13 Zhang W A, Yu L. Stability analysis for discrete-time switched time-delay systems[J]. Automatica, 2009, 45(10): 2265-2271.

14 Luo Y P, Xia W H, Liu G R, et al. LMI approach to exponential stabilization of distributed parameter control systems with delay[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(3): 299-304.

15 罗毅平, 邓飞其, 刘国荣. 基于 LMI 方法的时滞分布参数控制系统的镇定[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 625-628.
Luo Yiping, Deng Feiqi, Liu Guorong. LMI-based approach for stabilization of distributed parameter control systems with delay[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 625-628.

16 李延波. 时滞分布参数系统的 H_∞ 控制[J]. 科学技术与工程, 2010, 10(26): 6391-6393.
Li Yanbo. H_∞ control for distributed parameter systems with delay[J]. Science Technology and Engineering, 2010, 10(26): 6391-6393.

17 李延波. 具有分布时滞不确定中立型系统的滑模控制[J]. 控制工程, 2012, 19(1): 128-131.
Li Yanbo. Sliding mode control of uncertain neutral systems with distributed delays[J]. Control Engineering of China, 2012, 19(1): 128-131.

18 高存臣, 刘　振, 徐瑞萍. 一类具有连续分布时滞的分布参数系统的反馈控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 445-450.
Gao Cunchen, Liu Zhen, Xu Ruiping. Feedback control for a class of distributed parameter systems with continuous distributed time-delay[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 445-450.

19 Fridman E, Orlov Y. Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays. [J]. Automatica, 2009, 45(1): 194-201.